Université de Bourgogne Année 2020-2021
Topologie des espaces métriques L3 Maths 6 janvier

Contrôle terminal – 3h

Aucun document ou calculatrice n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, (E,d) est un espace métrique. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}^2$ seront munis de leur distance usuelle.

Exercice 1.
Soit X et Y deux ensembles. Soit $f\colon X \to Y$ une application.
1) Si A_1 et A_2 sont deux sous-ensembles de X, a-t-on forcément $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre exemple.
2) Si B_1 et B_2 sont deux sous-ensembles de Y, a-t-on forcément $f^{-1}(B_1 \cap B_2) = f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2)$? Si oui, le montrer. Si non, donner un contre exemple.

Exercice 2.
Si A et B sont deux sous-ensembles non-vides de E alors on pose $d(A,B) = \inf_{x\in A, y\in B} d(x,y)$.
1) Soit $F \subset E$ un fermé et $K \subset E$ un compact. Montrer que si $F \cap K = \varnothing$ alors $d(F,K) > 0$.
2) Donner un exemple de deux fermés F_1, F_2 de $\mathbb{R}^2$ tels que $F_1 \cap F_2 = \varnothing$ et $d(F_1, F_2) = 0$.

Exercice 3.
Soit (F, d') un deuxième espace métrique et soit une application $f\colon E \to F$.
1) Si f est uniformément continue, montrer que l'image par f d'une suite de Cauchy de E est une suite de Cauchy de F.
2) Si f est bijective, uniformément continue et de réciproque continue, montrer que si F est complet, alors E est aussi complet.

Exercice 4.
On suppose qu'il existe deux éléments x_0, x_1 de E tels que $x_0 \neq x_1$.
1) Expliquer comment construire une application continue $f\colon E \to \mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 1$.
2) En déduire que si l'on rajoute l'hypothèse que E est connexe alors E ne peut pas être dénombrable.

Exercice 5.
Soit $A \subset E$ une partie non-vide. Pour $r > 0$, on note A_r l'ensemble défini par

$$A_r = \cup_{x\in A} \tilde{B}(x,r).$$

1) A-t-on $A = \cap_{r>0} A_r$? Si oui, le prouver. Si non, déterminer $\cap_{r>0} A_r$.
Dans la suite de cet exercice, on fixe un entier $n \geq 1$ et on suppose que $E = \mathbb{R}^n$ et que la distance d est issue d'une norme. Rappelons que $A \subset E$ et fixons un $r > 0$ arbitraire.
2) Soit $x \in E$. Montrer que pour tout $y \in \tilde{B}(x,r)$ il existe $z \in \tilde{B}(0,r)$ tel que $y = x + z$.
3) Pour chacune des trois affirmations suivantes, la prouver si elle est vraie et en donner un contre-exemple sinon.
a) Si A est compact alors A_r est compact.
b) Si A est complet alors A_r est complet.
c) Si A est connexe alors A_r est connexe.
4) Donner des exemples de n, $A \subset \mathbb{R}^n$ et $r > 0$ où
a) A_r est connexe mais A n'est pas connexe.
b) A_r est complet mais A n'est pas complet.
c) A_r est compact mais A n'est pas compact.

Exercice 6.
On note

$$\mathbb{S}^1 := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 1\} \qquad \text{et} \qquad D := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\ y = 0\}.$$

Parmi les ensembles ci-dessous, lesquels sont connexes et lesquels ne sont pas connexes. Dans tous les cas, justifiez vos réponses.
1) $\mathbb{S}^1$, **2)** D, **3)** $\mathbb{R}^2 \setminus \mathbb{S}^1$, **4)** $\mathbb{R}^2 \setminus D$, **5)** $\mathbb{S}^1 \cup D$.

Exercice 7.
Soit A un fermé de $\mathbb{R}^2$. Montrer qu'il existe un sous-ensemble $B \subset \mathbb{R}^2$ tel que $A = \partial B$.