Licence de Mathématiques

2020-2021

Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités

Année : L3

Date : 20 Mai 2021

Examen

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les documents et calculatrices sont interdits.

Exercice 1 (Tests groupés) **:** Mille personnes subissent un test covid pour qu'on puisse déterminer si oui ou non, elles sont porteuses du virus. Cependant, pour pouvoir tester plus massivement, plutôt que de tester chaque personne individuellement, il a été décidé de former des groupes de 10 personnes. Les échantillons prélevés sur les dix personnes seront mélangés et analysés ensemble. Si le test est négatif, un seul test suffira pour ces 10 personnes. En revanche, si le test est positif, chacune des 10 personnes sera testée individuellement, ce qui fera en tout 11 tests pour ce groupe. On suppose que la probabilité qu'une personne soit porteuse du virus est de $p = 400/100000 = 1/250$ et que le virus frappe les gens indépendamment les uns des autres dans le groupe de 1000 personnes choisies. On admet que le test groupé sera positif dès qu'au moins une des 10 personnes est porteuse du virus. On note N_i le nombre de personnes porteuses du virus parmi les 10 personnes du $i^{\text{ème}}$ groupe et T le nombre de tests effectués en tout.

▷ **1)** Justifier que les variables $N_1, \ldots, N_{100}$ sont indépendantes et donner leur loi.

▷ **2)** Exprimer $\mathbb{P}(N_i = 0)$ puis $\mathbb{P}(T = 100)$ en fonction de p et justifier que $\mathbb{P}(T = 100) \simeq e^{-4}$. [A titre informatif, $e^{-4} \simeq 0.0183$.]

▷ **3)** On pose $Z_i = \mathbb{1}_{\{N_i=0\}} + 11\,\mathbb{1}_{\{N_i\neq 0\}}$. Calculer l'espérance et la variance de Z_i en fonction de p.

▷ **4)** Exprimer T en fonction des variables $Z_1, \cdots, Z_{100}$ et en déduire l'espérance et la variance du nombre de tests qu'il faut faire sur mille personnes avec cette stratégie.

▷ **5)** On obtient $\mathbb{E}[T] \simeq 139$ et $\mathbb{V}[T] \simeq 377$. Majorer $\mathbb{P}(T > 335)$. On pourra utiliser que $196^2 > 37700$. Que pensez-vous de cette stratégie de tests ?

Exercice 2 : Les variables aléatoires X et Y ont la densité conjointe

$$f(x,y) = \begin{cases} 12xy(1-x) & \text{si } 0 < x < 1, 0 < y < 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

▷ **1)** Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Déterminer leurs lois.

▷ **2)** Calculer $\mathbb{P}(Y \leq X)$ et $\mathbb{E}[XY]$.

▷ **3)** Déterminer la loi de $(U, V) = (X, XY)$.

Problème 1 (Lucky Luke) **:** Lucky Luke est à la poursuite de Ma Dalton. Ma Dalton traverse une voie ferrée et, se sentant en danger, se met à tirer sur Lucky Luke. Mais un convoi ferroviaire passe entre elle et Lucky Luke. Ainsi, ce convoi est atteint par un certain nombre de balles qui perforent les flancs latéraux des réservoirs parallélépipédiques des wagons. Le liquide contenu dans chaque réservoir se met à fuir jusqu'au niveau du trou le plus bas dans le flanc du réservoir. Dans ce problème, on ne s'intéresse qu'à **un seul réservoir** de hauteur h et de longueur l. On note, pour $i \in \mathbb{N}^*$, $Z_i = (X_i, Y_i)$ le point d'impact de la $i^{\text{ème}}$

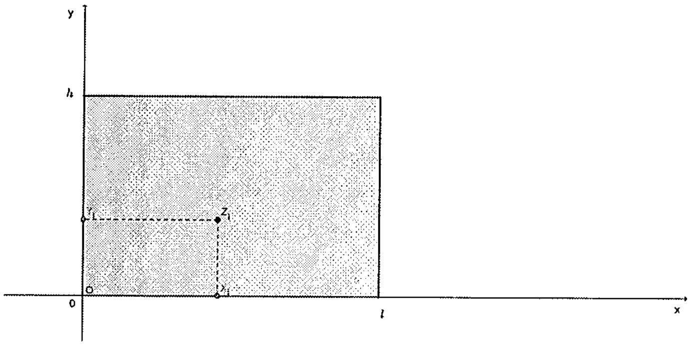
balle sur le réservoir et on suppose que celui-ci est uniformément réparti sur le flanc latéral du réservoir et que les variables aléatoires $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ sont indépendantes.

Dans un premier temps, on suppose qu'il y a un nombre fixe de balles $n \in \mathbb{N}^*$ qui atteignent le réservoir. On note M_n la variable correspondant à la hauteur du liquide restant dans le réservoir après la fusillade.

▷ **1)** Exprimer M_n en fonction des $(Z_i)_{1\leq i\leq n}$ (ou en fonction des X_i, Y_i pour $1 \leq i \leq n$).

▷ **2)** Calculer la fonction de répartition F_{M_n} de M_n (qui s'exprimera en fonction de n et de h).

▷ **3)** Calculer l'espérance $\mathbb{E}(M_n)$ et en déduire le pourcentage de liquide que l'on peut espérer sauver.



On suppose maintenant que le nombre d'impacts sur ce réservoir est une variable aléatoire N qui suit une loi de Poisson de paramètre α avec $\alpha > 0$, et on suppose que N est indépendante des $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$. On note M la variable aléatoire correspondant à la hauteur du liquide restant après la fusillade. Attention, il y a une probabilité non nulle qu'aucune balle n'atteigne le réservoir.

▷ **4)** Exprimer M en fonction des $(Z_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ (ou en fonction des $X_i, Y_i, i \in \mathbb{N}^*$) et en fonction de N.

▷ **5)** Calculer $\mathbb{P}(M = h)$.

▷ **6)** Calculer la fonction de répartition F_M de M (qui s'exprimera en fonction de h et de α) et tracer son graphe. **Indication :** On commencera par calculer $\mathbb{P}(M \leq t|N = n)$ ou $\mathbb{P}(M \leq t, N = n)$ pour tout réel t et tout entier n (en faisant attention au cas où $n = 0$).

▷ **7)** La loi de la variable aléatoire M est-elle discrète ? à densité ?

▷ **8)** Calculer l'espérance $\mathbb{E}(M)$ et en déduire le pourcentage de liquide que l'on peut espérer sauver.

Problème 2 (la collectionneuse) **:** Combien vous faudra-t-il acheter de paquets de vos céréales préférées pour pouvoir enfin compléter la collection d'images ? Chaque paquet de céréales contient une image permettant de reconstituer une grande carte. La collection comporte $N = 250$ images. Nous supposons que la marque de céréales a mis en circulation le même nombre de chacune des images qui constituent la collection, la proportion d'images en circulation représentant une image donnée est donc de $1/250$. On appelle T_N la variable aléatoire égale au nombre de paquets à acheter pour terminer la collection et Y_i le nombre de paquets nécessaires à l'obtention de la $i^{\text{ème}}$ image nouvelle sachant que l'on possède déjà $i-1$ images distinctes. Il est clair que $T_N = Y_1 + \ldots + Y_N$,

▷ **1)** Quelle est la loi de Y_i ? Que vaut $\mathbb{E}[Y_i]$?

▷ **2)** Montrer que $\mathbb{P}(T_N > t) \leq t^{-1} N \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k}$.

▷ **3)** Montrer que la suite $\left(\frac{T_N}{N^2}\right)$ converge en probabilités vers 0.

▷ **4)** Montrer que la suite $\left(\frac{T_N}{N^3}\right)$ converge presque sûrement vers 0.

▷ **5)** Calculer la fonction caractéristique de Y_i et en déduire la fonction caractéristique de T_N.

▷ **6)** On pose $Z_N = \frac{T_N - \mathbb{E}[T_N]}{N}$. Montrer que la fonction caractéristique de (Z_N) converge quand $N \to \infty$.