

Université de Bourgogne

Licence 3 de physique

CT Mécanique quantique 2020-2021

QCM

Questionnaire à choix multiples :

réponse juste (1 pt), pas de réponse (0 pt), réponse fausse (-0.5 pt). Pour chaque question, une seule réponse est juste.

On considère un système quantique à deux niveaux. Une base \mathcal{B} de l'espace de Hilbert est donnée par les états $|1\rangle$, $|2\rangle$. L'état du système est décrit par une fonction d'onde $|\psi(t)\rangle$ dont la dynamique est gouvernée par l'équation de Schrödinger :

$$i\frac{\partial}{\partial t}|\psi(t)\rangle = H|\psi(t)\rangle$$

Dans la base \mathcal{B} , l'Hamiltonien H est donné par :

$$H = \cos\theta\sigma_z + \sin\theta\sigma_x,$$

où $\theta \in (0, \pi)$. On rappelle que les matrices de Pauli sont données par :

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \quad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

A tout temps t , la fonction d'onde du système peut s'écrire sous la forme :

$$|\psi(t)\rangle = c_1|1\rangle + c_2|2\rangle,$$

où les coefficients complexes c_k sont de module $|c_k|$ et de phase ϕ_k , $c_k = |c_k|e^{i\phi_k}$.

1. L'opérateur H est un opérateur Hermitien si et seulement si :

- $H = {}^tH$
- $H = H^{-1}$
- $H = H^*$
- $H = H^\dagger$
- Aucune de ces réponses

2. Quelle est l'expression du commutateur $[\sigma_x, \sigma_y]$?

- $i\sigma_z$
- $-i\sigma_z$
- $2i\sigma_z$
- $-2i\sigma_z$
- Aucune de ces réponses

3. Quelle est l'expression de l'opérateur $\exp[-i\theta\sigma_x]$?

- $\cos(\theta) + i\sigma_x \sin(\theta)$
- $\cos(\theta) - i\sigma_x \sin(\theta)$
- $\cos(\theta/2) + i\sigma_x \sin(\theta/2)$
- $\cos(\theta/2) - i\sigma_x \sin(\theta/2)$
- Aucune de ces réponses

4. La fonction d'onde $|\psi\rangle$ est dite normalisée si $\langle\psi|\psi\rangle = 1$. Cela signifie que :

- $c_1^2 + c_2^2 = 1$
- $\phi_1 + \phi_2 = 0$
- $|c_1|^2 + |c_2|^2 = 1$
- $\phi_1\phi_2 = 0$
- Aucune de ces réponses

5. Quel est le déterminant de l'Hamiltonien H ?

- 0
- 1
- $2 \cos \theta$
- $\cos(2\theta)$
- Aucune de ces réponses

6. Quelle est la trace de l'Hamiltonien H ?

- 0
- 1
- $2 \cos \theta$
- $\cos(2\theta)$
- Aucune de ces réponses

7. Quelles sont les valeurs propres de l'Hamiltonien H ?

- 0 et 1
- 1 et 1
- $-\cos \theta$ et $\cos \theta$
- $-\sin \theta$ et $\sin \theta$
- Aucune de ces réponses

8. Quelle est l'expression du bra $\langle\psi|$?

- $\langle 1|c_1 + \langle 2|c_2$
- $\langle 1|c_1^* + \langle 2|c_2^*$
- $\langle 1||c_1| + \langle 2||c_2|$
- $\langle 1||c_1|^2 + \langle 2||c_2|^2$
- Aucune de ces réponses

9. Quelle relation vérifie l'Hamiltonien H ?

- $\det(\exp[H]) = \exp[\text{Tr}(H)]$
- $\text{Tr}(\exp[H]) = \exp[\det(H)]$
- $\det(\exp[H]) = \exp[\det(H)]$
- $\text{Tr}(\exp[H]) = \exp[\text{Tr}(H)]$
- Aucune de ces réponses

10. On considère la fonction d'onde $|\chi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|1\rangle - |2\rangle)$. Quelle est l'expression de la valeur moyenne $\langle\chi|H|\chi\rangle$?

- $\cos\theta$
- $-\cos\theta$
- $\cos\theta - \sin\theta$
- $\cos\theta + \sin\theta$
- Aucune de ces réponses

11. On considère désormais un espace de Hilbert de dimension 3. On étudie un système dont l'Hamiltonien peut s'écrire dans la base $\{|1\rangle, |2\rangle, |3\rangle\}$

sous la forme $H = H_0 + \varepsilon H_1$ où $H_0 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $H_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

ε étant un petit paramètre. Quelle est la correction des valeurs propres de H au premier ordre en ε ?

- Cette correction est nulle pour les 3 valeurs propres.
- La correction est égale à ε pour les 3 valeurs propres.
- La correction est égale à $-\varepsilon$ pour les 3 valeurs propres.
- La correction est respectivement égale à 2ε , ε et 0 pour les valeurs propres 2, 1 et 0.

12. On considère le même système qu'à la question précédente avec $\varepsilon = 1$.

Une des quatre affirmations suivantes est fausse. Laquelle ?

- $\langle 1|H|1\rangle = 2$.
- $\langle 1|H|2\rangle = 1$.
- $\langle 1|H|3\rangle = 1$.
- $\langle 2|H|3\rangle = 1$.

13. Le MASER a été inventé en :

- 1943.
- 1953.
- 1963.
- 1973.

14. I. I. Rabi a découvert le phénomène de Résonance Magnétique Nucléaire en :

- 1908.
- 1938.
- 1968.
- 1998.

15. On considère l'Hamiltonien $H = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Parmi ces affirmations, laquelle est fausse ?

- Les deux vecteurs propres de H sont orthogonaux.
- Il existe une infinité de vecteurs propres de H .
- Le spectre de H n'est pas dégénéré.
- H a une valeur propre égale à i .

Problème I

On rappelle que la fonction d'onde $|\psi\rangle$ d'un spin-1/2 peut être paramétrée de façon générale par la donnée de deux nombres complexes c_+ et c_- ou bien deux angles (θ, ϕ) selon :

$$|\psi\rangle = c_+|+\rangle + c_-|-\rangle = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{-i\phi/2}|+\rangle + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)e^{i\phi/2}|-\rangle$$

Un état peut donc être représenté par un point de coordonnées sphériques associées à (θ, ϕ) sur une sphère, appelée sphère de Bloch. On étudie ici la dynamique d'un spin 1/2 en présence d'un champ magnétique extérieur constant B pris selon l'axe z . On ne prend en compte que l'interaction Zeeman dans l'Hamiltonien H qui s'écrit donc $H = -\vec{\mu} \cdot \vec{B}$. On note $\vec{\mu}$ l'observable moment magnétique associée au spin et on rappelle que $\vec{\mu} = \mu_0\vec{\sigma}$ avec $\vec{\sigma} = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$ le vecteur des matrices de Pauli. On prendra $\mu_0 > 0$. L'état initial est donné par le couple (θ_0, ϕ_0) .

1. Déterminer l'expression de la matrice Hamiltonienne dans la base $|\pm\rangle$. On introduira le paramètre ω_0 tel que $\hbar\omega_0 = \mu_0 B$. Quelle est la dimension physique de ce paramètre.
2. Trouver l'état $|\psi(t)\rangle$ en résolvant l'équation de Schrödinger.
3. En déduire les expressions de $\theta(t)$ et $\phi(t)$.
4. Représenter la trajectoire correspondante sur la sphère de Bloch. Comment appelle-t-on ce type de mouvement ?
5. Calculer les valeurs moyennes des composantes du spin $\vec{S}(t)$.