

1) Répondre aux questions suivantes:

- Pourquoi impose-t-on  $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 = 1$ ?
- Pourquoi  $\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \varphi(x)$ , où  $H\varphi = E\varphi$ , est appelé état stationnaire? (Qu'est-ce qui est indépendant du temps?)
- Expliquer le principe d'exclusion de Pauli.
- Soit  $(\Delta A)_{\varphi}^2 \equiv \langle \varphi, A^2 \varphi \rangle - \langle \varphi, A \varphi \rangle^2$  le carré de l'écart quadratique de l'observable  $A$  pour un système dans l'état  $\varphi$ . Montrer que si  $\varphi_n$  est un état propre de  $A$  alors  $(\Delta A)_{\varphi_n} = 0$ . Interprétation.
- Quelle est la relation entre les raies spectrales d'un atome d'hydrogène et les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondant?
- Citer des exemples de Bosons et de Fermions.

2) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Après le changement de variables  $\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$ ,  $\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \equiv -i \frac{d}{d\bar{x}}$  l'Hamiltonien s'écrit  $H = \hbar\omega \bar{H}$ ,  $\bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$ .

On définit les opérateurs  $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$  et  $N := a^\dagger a$ .

- Déterminer les relations de commutation  $[\bar{x}, \bar{p}]$ ,  $[a, a^\dagger]$ ,  $[N, a]$ ,  $[N, a^\dagger]$ .
- Exprimer  $H$  en fonction de  $a$  et  $a^\dagger$ .
- Déterminer les valeurs propres de  $H$ .
- Ecrire les deux fonctions propres  $\varphi_n$  de plus basses énergies, explicitement comme des fonctions de la variable  $x$ .

3) On considère un modèle simple pour la rotation d'une molécule en terme d'un rotateur rigide décrit par l'Hamiltonien

$$H = B \vec{L}^2$$

où  $B$  est une constante caractéristique de la molécule et  $\vec{L}$  est l'opérateur moment cinétique.

- Ecrire  $\vec{L}$  en termes des opérateurs de position et d'impulsion.
- Déterminer les relations de commutation  $[L_j, L_k]$  entre les composantes du moment cinétique.
- Déterminer la relation de commutation  $[\vec{L}^2, L_3]$ , en utilisant l'identité  $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ .
- Quelles sont les valeurs propres et les fonctions propres de l'Hamiltonien  $H$ ?
- Quel est le degré de dégénérescence des valeurs propres?