

1) Répondre aux questions suivantes:

- Pourquoi impose-t-on $\int_{-\infty}^{\infty} dx |\psi(x, t)|^2 = 1$?
- Pourquoi $\psi(x, t) = e^{-iEt/\hbar} \varphi(x)$, où $H\varphi = E\varphi$, est appelé état stationnaire? (Qu'est-ce qui est indépendant du temps?)
- Expliquer le principe d'exclusion de Pauli.
- Soit $(\Delta A)_{\varphi}^2 \equiv \langle \varphi, A^2 \varphi \rangle - \langle \varphi, A \varphi \rangle^2$ le carré de l'écart quadratique de l'observable A pour un système dans l'état φ . Montrer que si φ_n est un état propre de A alors $(\Delta A)_{\varphi_n} = 0$. Interprétation.
- Quelle est la relation entre les raies spectrales d'un atome d'hydrogène et les valeurs propres de l'Hamiltonien correspondant?
- Citer des exemples de Bosons et de Fermions.

2) On considère un oscillateur harmonique décrit par l'Hamiltonien

$$H = \frac{1}{2m} p^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$$

Après le changement de variables $\bar{x} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x$, $\bar{p} = \frac{1}{\sqrt{m\hbar\omega}} p \equiv -i \frac{d}{d\bar{x}}$ l'Hamiltonien s'écrit $H = \hbar\omega \bar{H}$, $\bar{H} = \frac{1}{2}(\bar{x}^2 + \bar{p}^2)$.

On définit les opérateurs $a := (\bar{x} + i\bar{p})/\sqrt{2}$ et $N := a^\dagger a$.

- Déterminer les relations de commutation $[\bar{x}, \bar{p}]$, $[a, a^\dagger]$, $[N, a]$, $[N, a^\dagger]$.
- Exprimer H en fonction de a et a^\dagger .
- Déterminer les valeurs propres de H .
- Ecrire les deux fonctions propres φ_n de plus basses énergies, explicitement comme des fonctions de la variable x .

3) On considère un modèle simple pour la rotation d'une molécule en terme d'un rotateur rigide décrit par l'Hamiltonien

$$H = B \vec{L}^2$$

où B est une constante caractéristique de la molécule et \vec{L} est l'opérateur moment cinétique.

- Ecrire \vec{L} en termes des opérateurs de position et d'impulsion.
- Déterminer les relations de commutation $[L_j, L_k]$ entre les composantes du moment cinétique.
- Déterminer la relation de commutation $[\vec{L}^2, L_3]$, en utilisant l'identité $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$.
- Quelles sont les valeurs propres et les fonctions propres de l'Hamiltonien H ?
- Quel est le degré de dégénérescence des valeurs propres?