

1) Dessiner le portrait de phase et donner une classification de tous les types d'orbites possibles pour les systèmes décrits par les Hamiltoniens suivants :

(a) $H = p^2/(2m) + x^6$.

(b) $H = p^2/(2m) - x^2$.

(c) $H = p^2/(2m) - x^2 + x^6$.

(d) $H = p^2/(2m) - \cos^2(x)$.

(e) Définir les concepts suivants : (i) point d'équilibre stable, (ii) point d'équilibre instable, (iii) séparatrice.

2) L'énergie cinétique et l'énergie potentielle d'un pendule de masse m et longueur l sont données par

$$E_{cin} = \frac{1}{2}ml^2v^2, \quad E_{pot} = -mgl \cos(\theta),$$

où θ est l'angle par rapport à la verticale, $v = \frac{d\theta}{dt}$ la vitesse angulaire, et $g = 9.81ms^{-2}$.

- Ecrire l'équation du mouvement de Newton pour θ .
- Ecrire le Lagrangien pour ce système, et montrer que les équations d'Euler-Lagrange correspondantes sont équivalentes aux équations de Newton.
- Quel est le moment canoniquement conjugué à θ ?
- Déterminer l'Hamiltonien correspondant à ce système et écrire les équations de Hamilton.
- Montrer que l'énergie totale est conservée.

3) On considère une station spatiale qui est à une distance de la terre L fixe. On considère que le repère défini par la Terre et la station est inertiel. Une fusée est lancée depuis la terre au temps $t_0 = 0$, avec une vitesse constante v en direction de la station. Au moment du lancement la terre envoie un signal radio vers la station.

- Quel est le temps d'arrivée du signal à la station mesuré sur la station ?
- Quel est le temps correspondant dans le repère de la fusée ?
- Quelle est la distance entre la Terre et la station mesurée dans le repère de la fusée ?

Quand la fusée arrive à la station spatiale (et continue son voyage avec la même vitesse) la station envoie un signal radio vers la Terre.

- Quel est le temps d'arrivée de ce signal sur la Terre, mesuré par une horloge immobile sur la Terre ?
- Quel est le temps correspondant dans le repère de la fusée ?

4) On considère une intervalle d'espace-temps décrit par le quadri-vecteur $\underline{\Delta x}$.

- Définir les différents types d'intervalle en fonction de leur situation par rapport au cône de la lumière.
- Quelles sont les possibles relations de causalité pour les différents types d'intervalles ?
- Montrer que pour deux événements séparés par un intervalle de type espace il existe un repère dans lequel ils sont simultanés.
- Montrer que l'intervalle de temps propre entre deux événements peut s'exprimer par la pseudo-norme du quadri-vecteur correspondant dans un repère quelconque.