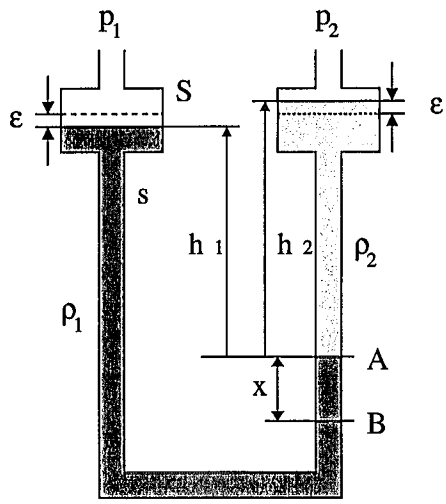
Contrôle de Mécanique des fluides - Session 1

17 Mai 2021 – durée : 2 heures

Exercice 1

On étudie un manomètre constitué de deux liquides supposés incompressibles. Ce manomètre peut être raccordé en deux points d'une installation contenant de l'air à des pression p_1 et p_2.



1. Lorsque les pressions p_1 et p_2 sont égales à la pression atmosphérique (manomètre ouvert par exemple), l'interface des deux liquides de masse volumique ρ_1 et ρ_2 se trouve en A et les surfaces libres des deux liquides sont respectivement situées à des hauteurs h_1 et h_2 par rapport à A (voir figure).
   Donner la relation entre h_1, h_2, ρ_1 et ρ_2.
2. Lorsqu'on le manomètre est raccordé et que la pression p_2 est supérieure à la pression p_1, l'interface se déplace de x au point B et les surfaces libres de ε (traits pointillés sur la figure).
   Exprimer la différence de pression $\Delta p = p_2 - p_1$ en fonction de x, ρ_1, ρ_2, g, s et S en utilisant la relation établie à la question précédente et en exprimant ε en fonction de s, S et x (indication : les fluides sont incompressibles).

Exercice 2

On étudie l'écoulement plan d'un fluide parfait incompressible et irrotationnel dont le potentiel des vitesses en un point $M(r, \theta)$ dans le plan Oxy s'écrit :

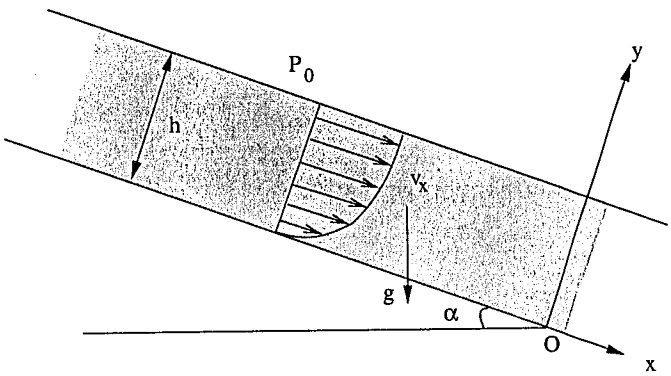
$$\phi(r, \theta) = Ar^{\pi/\alpha} cos\left(\frac{\pi}{\alpha}\theta\right)$$

où r et θ désignent les coordonnées polaires.

1. Calculer les composantes v_r et v_θ du champ des vitesses et montrer que le module de la vitesse ne dépend que de la variable r.
2. Vérifier que l'écoulement est incompressible.
3. Déterminer la fonction de courant $\Psi(r, \theta)$ de cet écoulement (on prendra la constante d'intégration nulle).
4. Pour le cas particulier où $\alpha = \pi/2$, déterminer les deux plus petites valeurs de θ pour lesquelles on a $\Psi = 0$. En considérant que les lignes de courant $\Psi = 0$ correspondent à la surface d'un obstacle, à quoi correspond cet écoulement ?

Exercice 3

On considère l'écoulement plan stationnaire d'un fluide visqueux incompressible sur un plan incliné d'un angle α par rapport au plan horizontal. Le fluide est soumis aux seules forces de pesanteur ($\vec{g}$: vertical descendant). L'écoulement est dirigé suivant l'axe $O\vec{x}$, et on choisit l'axe $O\vec{y}$ perpendiculaire à $O\vec{x}$ (voir figure ci-dessous). On note h l'épaisseur constante de l'écoulement, et P_0 la pression atmosphérique à la surface libre.



1. En supposant que le champ des vitesses est de la forme : $\vec{V} = V_x\, \vec{e}_x \;\; (V_y = 0)$, montrer que la composante V_x ne dépend que de y. En déduire l'expression des équations de Navier-Stokes sur les axes Ox et Oy (indication : écrire $\vec{g}$ dans le repère Oxy).
2. Montrer que la pression $p(x, y)$ a pour expression :

$$p(y) = (h - y)K_1 + K_2$$

   où K_1 et K_2 sont des constantes à préciser.
3. Écrire la première équation de Navier Stokes (projection sur l'axe x). En déduire l'équation différentielle du second ordre qui permet de déterminer la vitesse V_x.

4. Déterminer l'expression de $V_x(y)$.
5. On donne la condition limite à la surface libre $(y = h)$: $\dfrac{\partial \vec{V}}{\partial y} = 0$.

   En précisant la condition limite à la paroi $(y = 0)$, déduire l'expression du champ des vitesses en fonction de ρ, g, α, h, y et μ.
6. En déduire la forme du profil et dire comment varie la vitesse en fonction de la viscosité (sans faire de calcul).
7. Calculer la vitesse moyenne V_m.

Formulaire :

Équations de Navier-Stokes pour un fluide incompressible dans le champ de pesanteur :

$$\rho \frac{d\vec{V}}{dt} = -\vec{grad}\, p + \mu \vec{\Delta} \vec{V} + \rho \vec{g}$$

avec : $\vec{\Delta}\vec{V} = \Delta V_x \vec{e}_x + \Delta V_y \vec{e}_y$ et $\Delta f(x,y) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en deux dimensions.