Traction simple des arbres cylindriques homogènes

On considère l'espace physique ε^3 auquel on associe le repère $R = (O_0, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ dont la base $b = (\vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ est supposée orthonormée directe. Dans R, supposé galiléen, un point est repéré, à l'instant t, par l'ensemble de ses coordonnées $x = (x_1, x_2, x_3)$.

On considère un cylindre C d'axe $(O_0, \vec{x_3})$ et de section droite Σ quelconque (mais connue). On note Ω l'intérieur de C. La surface latérale est appelée Σ_2. Ce cylindre est limité en hauteur par Σ_0 située à $x_3 = 0$ et par Σ_1 située à $x_3 = l$. On note O le centre d'inertie de la section courante Σ dont l'aire est S. Les points O_0 et O_1 sont les centres d'inertie des sections Σ_0 et Σ_1 et chaque repère $R_\Sigma = (O, \vec{x_1}, \vec{x_2}, \vec{x_3})$ est principal d'inertie.

On se place dans le cadre suivant :
- on fait l'Hypothèse des Petites Perturbations;
- le domaine est supposé est équilibre quasi-statique;
- on néglige les forces de volume;
- le cylindre est supposé homogène constitué par un matériau dont ρ désigne la masse volumique.

On suppose que les conditions aux limites sont les suivantes :
- sur Σ_0, on applique la densité surfacique d'effort $-F/S\vec{x_3}$;
- sur Σ_1, on applique la densité surfacique d'effort $F/S\vec{x_3}$;
- la surface Σ_2 est libre d'effort.

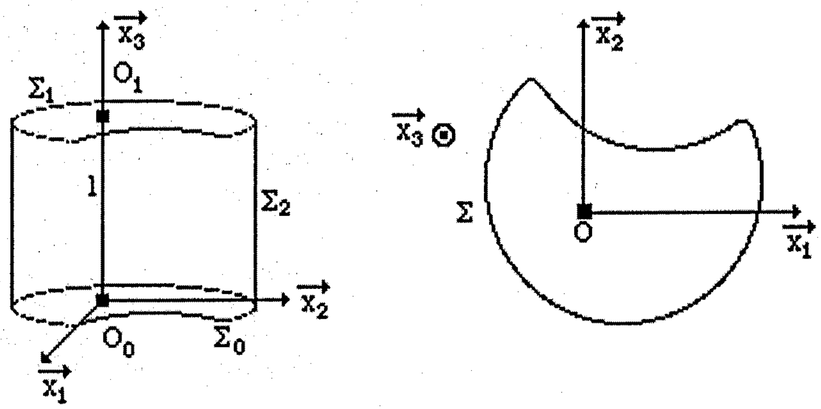

FIGURE 1 – Système étudié

A) Equations du problème dans le cas général d'un matériau dont le comportement est élastique linéaire anisotrope

On suppose ici que le matériau qui constitue le cylindre a un comportement élastique linéaire anisotrope.

1) Montrer que le cylindre est globalement en équilibre.

2) Ecrire les équations à résoudre si l'on souhaite déterminer en tout point du cylindre, le champ des contraintes et le champ des déplacements. Le problème ainsi posé rentre-t-il dans le cadre des problèmes généraux d'élasticité? Discuter l'existence et l'unicité des solutions.

3) On considère un champ de contraintes dont toutes les composantes sont nulles sauf $\sigma_{33}(M) = F/S$. Montrer que ce tenseur est la solution du problème. Combien de tenseur de déformations différents lui sont-ils associés?

4) Combien de champ de déplacements va fournir l'intégration des déformations issues de $\sigma(M)$? Sont-ce les solutions en déplacements du problème? Existe-t-il un lien entre eux?

B) Cas particulier : matériau isotrope

On suppose ici que le matériau qui constitue le cylindre a un comportement élastique linéaire isotrope dont (E, ν) et (λ, μ) sont respectivement le module d'Young et le coefficient de Poisson et les deux coefficients de Lamé. Sa loi de comportement s'écrit donc conformément à la loi de Hooke :

$$\varepsilon(\vec{u}) = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}Tr(\sigma)\mathbb{I} \Longleftrightarrow \sigma = \lambda Tr(\varepsilon(\vec{u}))\mathbb{I} + 2\mu\varepsilon(\vec{u})$$

1) Trouver un champ de déformations associé à $\sigma(M)$. Est-ce le seul ?

2) Trouver le ou les champ(s) de déplacements associés.

3) A-t-on trouvé le ou les champs solutions en déplacement du problème ?

C) Identification des valeurs de E et ν

1) On souhaite identifier les valeurs de E et ν. Expliquer le procédé expérimental qui permettrait d'obtenir les valeurs de E et ν.

2) La forme du cylindre précédent est-elle judicieuse pour réaliser l'identification souhaitée ? Si non, quelle forme préconisez-vous ? Pourquoi ?

3) Quel dispositif expérimental est nécessaire pour réaliser l'identification souhaitée ?

4) Pourquoi le problème de la traction simple est-il parfaitement adapté à la réalisation de l'identification souhaitée ?