L3 SPI Méca.

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
EXAMEN DE MÉTHODES MATHÉMATIQUES - JANVIER 2021
*Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.*

**Exercice I**

A) On résout l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante, où $y \equiv y(x)$, par la méthode de Frobenius

$$y'' - 2x\, y' + 2\alpha\, y = 0. \tag{1}$$

1) A partir du développement en série

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{k+j}, \tag{2}$$

(a) déterminer l'équation indicielle;
(b) déterminer la relation de récurrence entre $a_{j+2}$ et $a_j$.

2) Résoudre l'équation indicielle, et en déduire que les deux possibles solutions s'écrivent :

$$y = a_0\left[1 - \frac{2\alpha}{2!}x^2 - \frac{2^2\alpha(2-\alpha)}{4!}x^4 - \frac{2^3\alpha(2-\alpha)(4-\alpha)}{6!}x^6 - \cdots\right], \tag{3}$$

$$y = a_0 x\left[1 + \frac{2(1-\alpha)}{3!}x^2 + \frac{2^2(1-\alpha)(3-\alpha)}{5!}x^4 + \cdots\right]. \tag{4}$$

3) Vérifier si ces solutions sont linéairement indépendantes.
A-t-on toutes les solutions de l'équation (1) ? Pourquoi ?

4) Montrer que ces séries convergent en calculant le rapport des coefficients consécutifs $a_{j+2}/a_j$ dans la limite $j \to +\infty$.

B) Exprimer les solutions lorsque $\alpha$ est entier positif : $\alpha = 0, 1, 2, 3 \cdots$.
On note ces solutions $y(x) = H_n(x)$ avec $n \equiv \alpha = 0, 1, 2, 3, \cdots$.
Ecrire les quatre premières solutions (pour $n = 0, 1, 2, 3$).

C) Montrer que dans le cas contraire (lorsque $\alpha$ n'est pas entier), le rapport $a_{j+2}/a_j$ varie comme le rapport correspondant des coefficients du développement de Taylor de $e^{x^2}$ dans la limite $j \to +\infty$, c'est-à-dire que $y(x) \sim e^{x^2}$ ou $y(x) \sim xe^{x^2}$ pour $x \to +\infty$.
Pour ce faire, à partir du développement de Taylor de $e^x$

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \cdots \tag{5}$$

on montrera que celui de $e^{x^2}$ prend la forme

$$e^{x^2} = b_0 + b_2x^2 + b_4x^4 + b_6x^6 + \cdots + b_\ell x^\ell + \cdots \tag{6}$$

avec $b_{\ell+2} = 2b_\ell/(\ell+2)$ et $\ell = 0, 2, 4, \cdots$

**Exercice II**

Soit l'équation différentielle complexe de la function inconnue $\psi(x,t)$ :

$$i\frac{\partial\psi(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2}\frac{\partial^2\psi(x,t)}{\partial x^2} + V(x)\,\psi(x,t) \tag{7}$$

avec une fonction donnée $V(x) \geq 0$.

1) Appliquer la méthode de séparation de variable : $\psi(x,t) = \phi(t)X(x)$, et en déduire les équations différentielles ordinaires (EDO) en $x$ et $t$.
On notera la constante de séparation $E > 0$.

2) En déduire les solutions générales $\phi(t)$.

3) Ecrire l'EDO de solution $X(x)$.

4) On considère le cas particulier $V(x) = \frac{1}{2}x^2$.
Montrer alors que l'EDO de $X(x)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2X}{dx^2} + (\beta - x^2)X(x) = 0, \tag{8}$$

où on déterminera la constante $\beta$.

5) Exprimer l'équation différentielle (8) en $W(x)$ après substitution $X(x) = W(x)\, e^{-x^2/2}$.

6) En utilisant les résultats de l'exercice I, exprimer les solutions générales $W(x)$.
En déduire $X(x)$.

7) En choisissant les solutions $X(x) = H_n(x)\, e^{-x^2/2}$ avec $n$ entier positif ou nul, déduire les valeurs possibles de $E$.

8) Montrer d'après la question I.C) que ces solutions $X(x) = H_n(x)\, e^{-x^2/2}$ sont les seules acceptables si on impose $\psi(x,t) \to 0$ pour $x \to \pm\infty$.

**Exercice III.** Dans cet exercice, on notera la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx. \tag{9}$$

Soit la fonction

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f_a(x)$.

2) Représenter les graphes de $f_a(x)$ et de sa transformée de Fourier pour $a = 3$.

3) Utiliser les résultats de la question 1 pour évaluer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ka)\cos(kx)}{k} dk.$$

4) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy.$$