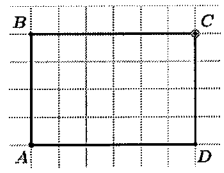
**L2** : Probabilités **Date** : Vendredi 18 décembre 2020 **Durée** : 2h - Math 3c

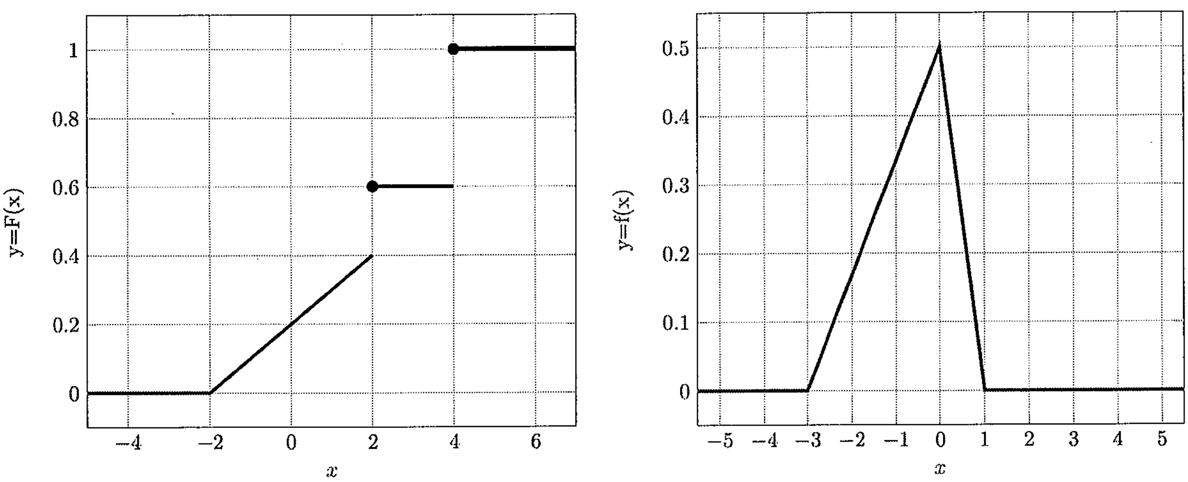
## Examen de Probabilités

**Exercice 1 :** Vous décidez de tracer un rectangle $ABCD$ au hasard sur votre feuille. On note $X$ la longueur AB, $Y$ la longueur $AD$ et $A$ l'aire du rectangle. On suppose que $X$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur $\{1, 2\}$ et que $Y$ est une v.a. de loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$ indépendante de $X$.




- ▷ **1)** Calculer $\mathbb{P}(A = 2)$ et $\mathbb{P}(X = 1|A = 2)$.
- ▷ **2)** Décrire E : "le rectangle est carré" en fonction de $X$ et $Y$ et calculer $\mathbb{P}(E)$.
- ▷ **3)** Déterminer la loi de $A$.
- ▷ **4)** Quelle est l'aire moyenne du rectangle ?
- ▷ **5)** Expliquer comment réaliser l'expérience précédente à partir des résultats aléatoires d'une pièce de monnaie et d'un dé à six faces équilibré.

**Exercice 2 :** La figure ci-dessous représente le graphe de la fonction de répartion $F$ d'une variable aléatoire $X$ (à gauche) et le graphe de la densité d'une variable aléatoire $Y$ (à droite).




Déterminer en justifiant :

▷ **1)** **i)** $\mathbb{P}(X = 4)$ **ii)** $\mathbb{P}(X \leq 0)$ **iii)** $\mathbb{P}(0 < X \leq 3)$ **iv)** $\mathbb{P}(1 \leq X < 4)$ **e)** $\mathbb{P}(X > 2)$.

▷ **2)** **i)** $\mathbb{P}(-3 < Y < 1)$ **ii)** $\mathbb{P}(Y < 0)$ **iii)** $\mathbb{P}(-1 < Y < 2)$

**Exercice 3 :** Soit $X$ et $Y$ deux variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $0 < p < 1$.

▷ **1)** Déterminer la loi de $Z = X - Y$.

▷ **2)** Calculer $\mathbb{P}(X = 0|Z = 0)$.

**Exercice 4 :** Une amie à vous vous informe que ses parents ont eu deux enfants et qu'elle même adore les probabilités. Vous voulez calculer la probabilité que votre amie ait une sœur. On suppose que la probabilité de donner naissance à une fille ou à un garçon est la même, et ce indépendamment des éventuelles naissances précédentes, et que le fait d'aimer ou non les probabilités pour une fille est une donnée indépendante de sa fratrie. On note $p$ la probabilité qu'une fille adore les probabilités. Le symbol $F_\heartsuit$ représentera une fille qui adore les probabilités, le symbol $F_\square$ une fille qui ne les aime pas plus que ça, et le symbole $G$ un garçon (le fait qu'il aime ou non les probabilités n'est pas une information prise en compte ici). Soit $\Omega$ l'univers représentant toutes les configurations possible d'une fratrie quelconque de deux enfants en tenant compte du sexe, du fait si oui ou non une fille aime les probabilités et de l'ordre d'apparition. Par exemple $F_\heartsuit G$ représente une fratrie dont L'aînée est une fille qui adore les probabilités et le cadet un garçon.

- ▷ **1)** Décrire l'univers $\Omega$ associé à cette modélisation. *Indication* $card(\Omega) = 9$.
- ▷ **2)** Justifier que $\mathbb{P}(\{F_\square G\}) = \frac{1-p}{4}$ et déterminer plus généralement la probabilité des neufs événements élémentaires.
- ▷ **3)** Décrire comme des sous-ensembles de $\Omega$ les événements
  - $A$ : "il y a au moins une fille qui adore les probabilités dans la fratrie" ;
  - $B$ : "la fratrie est composée de deux filles dont l'une au moins adore les probabilités".
- ▷ **4)** Calculer $\mathbb{P}(B)$. *Dans la suite on pourra utiliser le fait que* $\mathbb{P}(A) = \frac{p}{2}$.
- ▷ **5)** Calculer $\mathbb{P}(B|A)$ en fonction de $p$.

**Exercice 5 :** On lance indéfiniment une pièce truquée tombant sur pile deux fois plus souvent que sur face et ce de façon indépendante. On identifie "pile" avec 1 et "face" avec 0. On note $X_n$ le résultat du $n$ème lancé de sorte que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ soient indépendantes et identiquement distribuées de loi de Bernoulli de paramètre $p$. On s'intéresse au rang d'apparition de la première séquence de deux piles consécutifs, à savoir

$$R = \inf\{k \geq 2 : X_{k-1} = 1, X_k = 1\}.$$

- ▷ **1)** Que vaut $p$ ?
- ▷ **2)** Les six premiers lancés donnent la séquence $1, 0, 0, 1, 1, 1$. Quelle est la probabilité de cet événement ? Que vaut $R$ dans ce cas ?
- ▷ **3)** Pour tout $n \geq 2$ on note $p_n = \mathbb{P}(R = n)$.
  - (a) Que vallent les probabilités $p_2$ et $p_3$ ?
  - (b) Justifier que $\mathbb{P}(R = n+2|X_1 = 0) = p_{n+1}$ et $\mathbb{P}(R = n+2|X_1 = 1) = \frac{1}{3}p_n$.
  - (c) En déduire que $p_{n+2} = \frac{1}{3}p_{n+1} + \frac{2}{9}p_n$.
  - (d) Montrer que $p_n = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} + \frac{1}{2}\left(\frac{-1}{3}\right)^{n-2}\right]$.

**Exercice 6 :** Faire les calculs de $\mathbb{E}[X]$ lorsque $X$ suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et lorsque $X$ suit une loi géométrique de paramètre $p$.