Université de Bourgogne - L2 Année universitaire 2020-2021

Licence de Mathématiques Math3B

Examen

Décembre 2020. Durée 2h

Toutes les réponses doivent être justifiées avec soin

Exercice 1. (Questions de cours) *(4 points)* Soit E un espace vectoriel sur $\mathbb{R}$ et soit f un endomorphisme de E. Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux. Démontrer que

$$\mathrm{Ker}(PQ)(f) = \mathrm{Ker}P(f) \oplus \mathrm{Ker}Q(f).$$

Application. Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans une base de $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculer le polynôme caractéristique P_A et montrer qu'il existe deux polynômes P et Q de $\mathbb{R}[X]$ premiers entre eux tels que $P_A = PQ$ et

$$\mathbb{R}^3 = \mathrm{Ker}P(f) \oplus \mathrm{Ker}Q(f).$$

Exercice 2. *(Polynômes caractéristique et minimal) (6 points)* Soient n un entier non nul et $A, B \in M(n, \mathbb{C})$. On note P_A (resp. P_B) le polynôme caractéristique de A (resp. B) et μ_A (resp. μ_B) le polynôme minimal de A. Le but de l'exercice est de donner des conditions nécessaires et suffisantes pour que A et B soient semblables.

1. Montrer que si A et B sont semblables alors $P_A = P_B$ et $\mu_A = \mu_B$.
2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, donner un exemple de matrice B tel que $P_A = P_B$ mais A n'est pas semblable à B.
3. Soit
$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 7 & 4 \\ 0 & -12 & -7 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 3 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -4 & 8 & -3 \end{pmatrix}.$$
Montrer que $\mu_A = \mu_B$. En déduire que A et B sont diagonalisables mais non semblables.
4. On suppose que A est diagonalisable. Montrer que A est semblable à B si et seulement si $P_A = P_B$ et $\mu_A = \mu_B$.
5. Soit
$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & -4 & -2 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
Montrer que $P_A = P_B$, $\mu_A = \mu_B$ mais que A et B ne sont pas semblables.

Exercice 3. *(10 points)* On cherche à résoudre dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ l'équation différentielle suivante :

$$x''' - 5x'' + 7x' - 3x = 0, \quad x(0) = a, \, x'(0) = b, \quad x''(0) = c. \qquad (E)$$

On suppose que les nombres réels a, b et c vérifient la relation

$$3a - 4b + c = 0. \qquad (R)$$

1. Vérifier que résoudre (E) est équivalent à résoudre le système différentiel

$$X' = AX, \quad X(0) = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \qquad (S)$$

   où

$$X(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ x'(t) \\ x''(t) \end{pmatrix} \text{ et } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 3 & -7 & 5 \end{pmatrix}.$$

2. Calculer le polynôme caractéristique P_A de A. En déduire que les valeurs propres de A sont 1 et 3.
3. La matrice A est-elle diagonalisable dans $\mathbb{R}$? trigonalisable dans $\mathbb{R}$?
4. Exprimer les projecteurs spectraux π_1 et π_3 de A en fonction de A. En déduire que

$$\pi_1(A) = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix} -3 & -2 & 1 \\ 3 & -10 & 3 \\ 9 & -18 & 5 \end{pmatrix} \text{ et } \pi_3(A) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -6 & 3 \\ 9 & -18 & 9 \end{pmatrix}.$$

5. Soit (D, N) la décomposition de Dunford de A.
   (a) Calculer $D = \pi_1 + 3\pi_3$ et N.
   (b) Quel est le degré de nilpotence de N.
   (c) En utilisant la formule du binôme, calculer D^n (Sans diagonaliser D).
6. Calculer e^{tD} et e^{tN} et en déduire e^{tA}.
7. Déterminer la solution du système (S) et en déduire celle de (E) (N'oubliez pas que a, b et c vérifient la relation (R)).