Analyse – Math3A

Temps disponible : 2 heures

Documents et calculatrices interdits. Toutes les réponses doivent être justifiées. On pourra admettre la réponse à une question afin de répondre aux questions suivantes.

Exercice 1. Soit $I = [0, \pi]$. Notons $\lfloor x \rfloor$ la partie entière de $x \in \mathbb{R}$. Fixons $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

1. Dire si la fonction $g(x) = \lfloor \frac{nx}{\pi} \rfloor$ est en escalier sur I, éventuellement préciser pour quelle subdivision de I puis fournir la valeur de son intégrale sur I.
2. Soit $h : I \to \mathbb{R}$ une fonction décroissante. Justifier que h est bornée sur I.
3. *Démontrer qu'une fonction f décroissante sur I est intégrable sur I.*
4. Dire si la fonction $f(x)$ suivante est intégrable sur I et éventuellement calculer $\int_I f$:

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } nx \in \mathbb{Z}, \\ \sin(x) & \text{si } nx \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}. \end{cases}$$

La question en italique est une question de cours.

Exercice 2. Soit $f(x) = \frac{x}{x^2+2}$ et F la primitive de f avec $F(0) = \ln(\sqrt{2})$.

1. Calculer le développement en série entière de f autour de 0. Quel est son rayon ?
2. Exprimer F par des fonctions classiques.
3. Développer F série entière autour de 0. Quel est le rayon du développement ?
4. Calculer $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{k+n}{k^2+2nk+3n^2}$.

Exercice 3. Calculer le rayon de convergence R des séries entières suivantes.

a) $\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n 3^n}{n} x^n$, b) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n$.

Pour quels $x \in \mathbb{R}$ avec $|x| = R$ la série a) converge ? Calculer sa somme en ces points x.

Exercice 4. Soit $f(x)$ somme d'une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon $R > 0$ solution de :

$$xf''(x) - f'(x) - 4x^3 f(x) = 0, \qquad f(0) = 1, \qquad f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0.$$

1. Justifier que $a_1 = a_2 = a_3 = 0$ puis trouver une relation de récurrence sur les (a_n).
2. Montrer $a_n = 0$ sauf si $\exists k \in \mathbb{N}$ tel que $n = 4k$, puis vérifier $a_{4k} = \frac{1}{(2k)!}$, $\forall k \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que $f(x) = \cosh(x^2)$. Que vaut R ?