

Logique et Algèbre 1
Contrôle terminal

Question de cours 1. Soit

$$(E) \quad aZ^2 + bZ + c = 0$$

une équation polynomiale du second degré à coefficients complexes avec $a \neq 0$. Soit $\Delta = b^2 - 4ac$ le discriminant de cette équation. On suppose que $\Delta \neq 0$ et on note δ et $-\delta$ les deux racines carrées de Δ . Montrer que les solutions de (E) sont

$$z_1 = \frac{-b + \delta}{2a} \quad \text{et} \quad z_2 = \frac{-b - \delta}{2a}.$$

Question de cours 2. Soient $a, b \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Montrer qu'il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $\text{pgcd}(a, b) = ua + vb$.

Exercice 1. Calculer les racines carrées de $-7 + 24i$.

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\}$ l'application définie par

$$f(z) = \frac{z + 2}{1 + 2z}.$$

(1) Montrer que f est une bijection et calculer sa réciproque $f^{-1} : \mathbb{C} \setminus \{\frac{1}{2}\} \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{-\frac{1}{2}\}$.

(2) Soit $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$ le cercle de centre 0 et de rayon 1. Déterminer $f^{-1}(\mathcal{C})$.

Exercice 3. Résoudre l'équation entière suivante :

$$(E) \quad 195X + 84Y = 6.$$

Exercice 4. Soit n un entier plus grand ou égal à 2. Démontrer que, si n n'est divisible par aucun entier k tel que $2 \leq k \leq \sqrt{n}$, alors n est un nombre premier.