

Exercice I

- A) On résout l'équation différentielle ordinaire (EDO) suivante, où $y \equiv y(x)$, par la méthode de Frobenius

$$y'' - 2x y' + 2\alpha y = 0. \quad (1)$$

- 1) A partir du développement en série

$$y = \sum_{j=0}^{\infty} a_j x^{k+j}, \quad (2)$$

(a) déterminer l'équation indicelle;

(b) déterminer la relation de récurrence entre a_{j+2} et a_j .

- 2) Résoudre l'équation indicelle, et en déduire que les deux possibles solutions s'écrivent :

$$y = a_0 \left[1 - \frac{2\alpha}{2!} x^2 - \frac{2^2 \alpha (2-\alpha)}{4!} x^4 - \frac{2^3 \alpha (2-\alpha)(4-\alpha)}{6!} x^6 - \dots \right], \quad (3)$$

$$y = a_0 x \left[1 + \frac{2(1-\alpha)}{3!} x^2 + \frac{2^2(1-\alpha)(3-\alpha)}{5!} x^4 + \dots \right]. \quad (4)$$

- 3) Vérifier si ces solutions sont linéairement indépendantes.

A-t-on toutes les solutions de l'équation (1) ? Pourquoi ?

- 4) Montrer que ces séries convergent en calculant le rapport des coefficients consécutifs a_{j+2}/a_j dans la limite $j \rightarrow +\infty$.

- B) Exprimer les solutions lorsque α est entier positif : $\alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$

On note ces solutions $y(x) = H_n(x)$ avec $n \equiv \alpha = 0, 1, 2, 3, \dots$

Ecrire les quatre premières solutions (pour $n = 0, 1, 2, 3$).

- C) Montrer que dans le cas contraire (lorsque α n'est pas entier), le rapport a_{j+2}/a_j varie comme le rapport correspondant des coefficients du développement de Taylor de e^{x^2} dans la limite $j \rightarrow +\infty$, c'est-à-dire que $y(x) \sim e^{x^2}$ ou $y(x) \sim x e^{x^2}$ pour $x \rightarrow +\infty$.

Pour ce faire, à partir du développement de Taylor de e^x

$$e^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 + \dots \quad (5)$$

on montrera que celui de e^{x^2} prend la forme

$$e^{x^2} = b_0 + b_2 x^2 + b_4 x^4 + b_6 x^6 + \dots + b_\ell x^\ell + \dots \quad (6)$$

avec $b_{\ell+2} = 2b_\ell/(\ell+2)$ et $\ell = 0, 2, 4, \dots$

Exercice II

Soit l'équation différentielle complexe de la fonction inconnue $\psi(x, t)$:

$$i \frac{\partial \psi(x, t)}{\partial t} = -\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \psi(x, t)}{\partial x^2} + V(x) \psi(x, t) \quad (7)$$

avec une fonction donnée $V(x) \geq 0$.

- 1) Appliquer la méthode de séparation de variable : $\psi(x, t) = \phi(t)X(x)$, et en déduire les équations différentielles ordinaires (EDO) en x et t .

On notera la constante de séparation $E > 0$.

- 2) En déduire les solutions générales $\phi(t)$.

- 3) Ecrire l'EDO de solution $X(x)$.

- 4) On considère le cas particulier $V(x) = \frac{1}{2}x^2$.
Montrer alors que l'EDO de $X(x)$ s'écrit sous la forme

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + (\beta - x^2)X(x) = 0, \quad (8)$$

où on déterminera la constante β .

- 5) Exprimer l'équation différentielle (8) en $W(x)$ après substitution $X(x) = W(x) e^{-x^2/2}$.
6) En utilisant les résultats de l'exercice I, exprimer les solutions générales $W(x)$.
En déduire $X(x)$.
7) En choisissant les solutions $X(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$ avec n entier positif ou nul, déduire les valeurs possibles de E .
8) Montrer d'après la question I.C) que ces solutions $X(x) = H_n(x) e^{-x^2/2}$ sont les seules acceptables si on impose $\psi(x, t) \rightarrow 0$ pour $x \rightarrow \pm\infty$.

Exercice III. Dans cet exercice, on notera la transformée de Fourier

$$\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) e^{-2i\pi\nu x} dx. \quad (9)$$

Soit la fonction

$$f_a(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq a \\ 0 & \text{si } |x| > a \end{cases}$$

- 1) Calculer la transformée de Fourier de la fonction $f_a(x)$.
2) Représenter les graphes de $f_a(x)$ et de sa transformée de Fourier pour $a = 3$.
3) Utiliser les résultats de la question 1 pour évaluer

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin(ka) \cos(kx)}{k} dk.$$

- 4) En déduire la valeur de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(y)}{y} dy.$$