Examen - Géométrie. Durée 2h00.

Exercice 1. Similitudes complexes
Dans un plan affine euclidien orienté, rapporté au plan complexe, on note O l'origine, d'affixe 0, A le point d'affixe 1 et B le point d'affixe i. Soit F la similitude directe envoyant O sur A et A sur B.

1. Soit f la fonction complexe donnant l'affixe $f(z)$ de l'image $F(M)$ d'un point M d'affixe z.
   (a) Déterminer $f(z)$.
   (b) Donner le rapport et l'angle de F et préciser l'affixe ω de son centre Ω.
2. Quelle est l'image de la droite (AB) par F ? (on pourra justifier par des arguments géométriques ou bien effectuer un calcul).
3. Soient I, J et K les projetés orthogonaux de Ω sur (OA), (AB) et (BO) respectivement. Montrer que $F(I) = J$ et $F(J) = K$ (on pourra justifier par des arguments géométriques ou bien effectuer un calcul).
4. Soit $\mathscr{C}$ le cercle passant par O et tangent en A à la droite (AB). Soit $\mathscr{C}'$ l'image du cercle $\mathscr{C}$ par la similitude F. Montrer que $\mathscr{C} \cap \mathscr{C}' = \{A, \Omega\}$ (indication : on pourra utiliser des propriétés angulaires).

Exercice 2. Construction d'un triangle dont on connaît les médiatrices
On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Soient trois droites Δ_1, Δ_2 et Δ_3 distinctes concourantes en un point O. On considère les trois réflexions respectives s_1, s_2 et s_3 par rapport à ces trois droites. On note $f = s_3 \circ s_2 \circ s_1$.

1. Déterminer la nature de f.
2. Soit M un point de Δ_1 distinct de O et $M' = f(M)$. Montrer que la médiatrice Δ de $[MM']$ est une droite de points fixes de f et qu'elle ne dépend pas du choix de M.
3. Soit A_2 un point de $\Delta \setminus \{O\}$. On note $s_1(A_2) = A_3$ et $s_3(A_2) = A_1$. Montrer que Δ_1, Δ_2 et Δ_3 sont les médiatrices du triangle $A_1A_2A_3$.
4. On choisit un autre point B_2 sur $\Delta \setminus \{O\}$, et on note $s_1(B_2) = B_3$ et $s_3(AB_2) = B_1$. Quelle transformation du plan permet de transformer $A_1A_2A_3$ en $B_1B_2B_3$?

Exercice 3. Barycentres
On se place dans un plan affine euclidien $\mathscr{P}$. Soient ABC un triangle non aplati. On note $a = BC$, $b = AC$ et $c = AB$ les longueurs des arêtes et $p = \frac{1}{2}(a + b + c)$ le demi périmètre. Soient $\mathscr{C}$ le cercle inscrit, I son centre, A_1, B_1, C_1 les points de tangence respectifs entre $\mathscr{C}$ et les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$.

1. Montrer que $AB_1 = AC_1$, $BA_1 = BC_1$, $CA_1 = CB_1$.
2. On note $\alpha = AB_1 = AC_1$, $\beta = BA_1 = BC_1$ et $\gamma = CA_1 = CB_1$.
   Montrer que $\alpha = p - a$, $\beta = p - b$ et $\gamma = p - c$.
3. Montrer que $\alpha > 0$, $\beta > 0$ et $\gamma > 0$.
4. Donner des coordonnées barycentriques de A_1, B_1, C_1 dans le repère (A, B, C).
5. Montrer que les trois droites (AA_1), (BB_1), (CC_1) sont concourantes au point $\Omega = \mathrm{Bar}\begin{pmatrix} A & B & C \\ \frac{1}{\alpha} & \frac{1}{\beta} & \frac{1}{\gamma} \end{pmatrix}$.

Exercice 4. Lieu géométrique
On se place dans un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$. Soit $\mathscr{C}$ un cercle donné de centre Ω. Soit A un point distinct de Ω et n'appartenant pas à $\mathscr{C}$. Pour tout point M de $\mathscr{C}$, on construit le point N tel que le triangle AMN est rectangle en N et l'angle $(\overrightarrow{MA}; \overrightarrow{MN})$ a pour mesure $\frac{\pi}{6}$ $[2\pi]$. Déterminer et construire le lieu des points N, lorsque M décrit le cercle $\mathscr{C}$ (indication : on pourra faire intervenir une similitude directe).