Université de Bourgogne
Licence Sciences, Technologies, Santé, 2ème année

Mardi 4 mai 2021
13h30-15h30

Examen de Mathématiques - Session 1 - Math4B

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Montrer l'équivalence :
f est un automorphisme orthogonal si et seulement si l'image d'une base orthonormale de E par f est une base orthonormale.
2. Soit E un espace euclidien et f un endomorphisme de E. Montrer que f admet un adjoint et que celui-ci est unique.
Quel lien a-t-on entre les matrices associées à f et f^* dans une base orthonormale de E ?

Exercice 2 (Une isométrie en dimension 3) : Soient E un espace euclidien de dimension 3, $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ une base orthonormale directe de E et f un endomorphisme de E dont la matrice associée dans la base $\mathcal{B}$ est $A = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} a & b & -3 \\ 3 & 6 & -b \\ c & -3 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que f est un automorphisme orthogonal si et seulement si $(a, b, c) = (6, -2, 2)$.
On prendra ces valeurs pour la suite.
2. Déterminer le sous-espace $F = \{x \in E \mid f(x) = x\}$ des vecteurs invariants par f. Préciser sa dimension et en donner une base orthonormée.
3. Montrer que f est une rotation et préciser : son axe, le sinus et le cosinus de son angle θ.

Exercice 3 (Endomorphisme symétrique sur un espace de polynômes) : Soit $n \in \mathbb{N}$ et $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace des polynômes de degré inférieur ou égal à n. On munit E du produit scalaire : $\langle P \mid Q \rangle = \int_0^1 P(t)Q(t)\mathrm{d}t$.
À tout polynôme P on associe le polynôme $f(P) = (X^2 - X)P'' + (2X - 1)P' + P$.

1. Prouver que f est un endomorphisme de E.
2. Donner la matrice associée à f dans la base standard $(1, X, \cdots, X^n)$.
3. Montrer que f est un endomorphisme symétrique de E.
4. Dans cette question , on prend $n = 2$. Préciser les valeurs propres de f et donner une base orthonormale de vecteurs propres.

Exercice 4 (Réduction d'une forme quadratique) : Soit $q : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$ la forme quadratique donnée par

$$q(x, y, z) = x^2 + 2xy - xz + y^2 + z^2.$$

1. Appliquer la méthode de Gauss pour réduire la forme quadratique q et préciser son rang et sa signature.
2. Dans la suite on souhaite réduire la forme quadratique q dans le groupe orthogonal de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$.
   (a) Donner la matrice symétrique A associée à la forme polaire de q dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
   (b) Calculer les valeurs propres de A et une base orthonormale de vecteurs propres.
   (c) En déduire une forme réduite de la forme quadratique q dans une base orthonormale de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 5 (Deux questions indépendantes, la question 2 est hors barème) :

1. Soit f un endomorphisme d'un espace euclidien E et f^* son adjoint. Montrer que
   (a) $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) = \mathrm{Ker}(f)$ et $\mathrm{Ker}(f \circ f^*) = \mathrm{Ker}(f^*)$. (Pour montrer que $\mathrm{Ker}(f^* \circ f) \subset \mathrm{Ker}(f)$ on pourra considérer $\langle x \mid f^* \circ f(x) \rangle$).
   (b) En déduire que $\mathrm{Im}(f \circ f^*) = \mathrm{Im}(f)$ et $\mathrm{Im}(f^* \circ f) = \mathrm{Im}(f^*)$.
2. (Hors barème) Soit E un espace euclidien et soient f et g deux endomorphismes symétriques de E .
   (a) Justifier que les endomorphismes f et g sont diagonalisables.
   (b) Montrer que $f \circ g$ est symétrique si et seulement si f et g commutent : $f \circ g = g \circ f$.
   Dans la suite on suppose que f et g commutent.
   (c) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$ une valeur propre de f et $E_\lambda(f)$ le sous-espace propre associé. Montrer que $E_\lambda(f)$ est stable par g.
   (d) Montrer que f et g admettent une base orthonormale **commune** de vecteurs propres.