L2

CONTRÔLE TERMINAL – MATH4A

Durée 2h00. Tout document et appareil électronique interdit. Toute affirmation non-triviale doit être justifiée.

Exercice 1 (Question de cours).

(1) Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions continues convergent uniformément sur un intervalle I vers une fonction $f : I \to \mathbb{R}$. Montrer que f est continue. **(3 pts)**

(2) Pour toute fonction $f : [0,1] \to \mathbb{R}$, on note $\|f\|_\infty = \sup_{x\in I} |f(x)|$. En déduire que l'espace vectoriel normé $\big(\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty\big)$ est complet. **(1 pts)**

(3) Montrer avec un exemple que l'affirmation dans (1) n'est pas nécessairement vraie si l'on suppose uniquement que la convergence $f_n \to f$ est simple sur I. **(2 pts)**

(4) Soit $f_n : I \to \mathbb{R}$ une suite de fonctions convergent uniformément sur I vers une fonction continue f. Est-il vrai que les fonctions f_n sont continues ? **(2 pts)**

Exercice 2 (Séries de fonctions). Pour les séries de fonctions suivantes, on déterminera l'ensemble $\mathcal{S}$ des $x \in \mathbb{R}$ tels que la série converge simplement. Déterminer ensuite si la série converge normalement ou uniformément sur $\mathcal{S}$.

(a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\sqrt{1+nx}}$ (pour $x \geq 0$) ; **(2 pts)**

(b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n$, et dans ce cas on déterminera aussi la limite simple ; **(3 pts)**

(c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\ln(nx)\cos(n^3x)}{\sqrt{4+n^5x}}$ (pour $x > 0$). Mêmes questions pour $x \geq a$, avec $a > 0$ fixé. **(3 pts)**

Exercice 3 (Espaces vectoriels normés). Soit

$$E = \left\{ G(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n : a_n \in \mathbb{C} \quad \forall n \in \mathbb{N} \right\}$$

l'ensemble des séries entières à coefficients complexes.

(a) Montrer que E est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, par rapport à la somme de séries entières. **(1 pt)**

(b) Étant donné un élément $G \in E$, avec $G(z) = \sum_{n\in\mathbb{N}} a_n z^n$, on note

$$\nu(G) = \inf\{n \in \mathbb{N} : a_n \neq 0\} \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}.$$

(i) Montrer que $\nu(G) = \infty$ si et seulement si $G = 0$.

(ii) Montrer que $\nu(F+G) \geq \min\{\nu(F), \nu(G)\}$, avec égalité si $\nu(F) \neq \nu(G)$.

(iii) L'application ν définit-elle une norme sur E ? **(2 pts)**

(c) On considère l'application $V : E \to \mathbb{R}_+$, définie par $V(G) = 2^{-\nu(G)}$ si $G \neq 0$, et $V(0) = 0$. L'application V définit-elle une norme sur E ? **(2 pts)**

(d) On considère l'application $N : E \to \mathbb{R}_+$, définie par $N(G) = |a_{\nu(G)}|$ si $G \neq 0$ et $N(0) = 0$. L'application N définit-elle une norme sur E ? **(2 pts)**