Examen - UE Math2C - Compléments mathématiques - Durée 2h.

Exercice 1.

1. Résoudre sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle :

$$(E) \qquad y'' - 6y' + 25y = 8\,\mathrm{e}^{3x}.$$

2. Déterminer la solution satisfaisant les conditions initiales $y(0) = \frac{1}{2}$ et $y'(0) = 0$.

Exercice 2.

1. Soit $f : X \to Y$ une application.
   (a) Rappeler la définition de $f(A)$ pour $A \subset X$.
   (b) Rappeler la définition de $f^{-1}(B)$ pour $B \subset Y$.
   (c) Montrer que pour tout $A \in \mathscr{P}(X)$, on a $A \subset f^{-1}\big(f(A)\big)$.
   (d) Donner une condition nécessaire et suffisante pour que : $\forall A \in \mathscr{P}(X) \;\; f^{-1}\big(f(A)\big) = A$ (on n'en demande pas la démonstration).
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3 - x^2 & \text{si } x < 1 \\ \frac{2}{x} & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$$

   (a) Dresser le tableau de variation de la fonction f puis dessiner son graphe.
   (b) Soit $I = [0;2[$. Déterminer les ensembles suivants :

$$A = f(I) \qquad B = f^{-1}\big(f(I)\big) \qquad C = f^{-1}(I) \qquad D = f\big(f^{-1}(I)\big).$$

Exercice 3. On rappelle que le cercle C_r centré en $(0,0)$ de rayon $r > 0$ de $\mathbb{R}^2$ est l'ensemble des $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ tels que $x^2 + y^2 = r^2$. Pour tout $(x,y) \in C_r$, il existe un unique $\theta \in]-\pi;\pi]$ tel que $x = r\cos\theta$ et $y = r\sin\theta$.

1. On note $U = \bigcup_{r \in]0;1[} C_r$. Compléter l'écriture suivante de D :

$$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \qquad \cdots \qquad \}.$$

2. Pour $t \in \mathbb{R}$ on note $H_t = \big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x\cos t + y\sin t \leqslant 1\big\}$. Montrer l'égalité des deux ensembles :

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leqslant 1\} \qquad E = \bigcap_{t \in \mathbb{R}} H_t.$$

Exercice 4. Soit E un ensemble.

1. Soit $C \in \mathscr{P}(E)$.
   (a) Montrer que $\mathscr{P}(C) \subset \mathscr{P}(E)$.
   (b) Comparer $\mathscr{P}(C^c) = \mathscr{P}(E \setminus C)$ et $(\mathscr{P}(C))^c = \mathscr{P}(E) \setminus \mathscr{P}(C)$.
2. Soient A et B deux sous-ensembles de E.
   (a) Montrer que $\mathscr{P}(A \cap B) = \mathscr{P}(A) \cap \mathscr{P}(B)$.
   (b) Montrer que $\mathscr{P}(A) \cup \mathscr{P}(B) \subset \mathscr{P}(A \cup B)$.
   (c) Montrer qu'on a égalité dans le dernier cas si et seulement si $A \subset B$ ou $B \subset A$.