UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
U.F.R. Sciences et Techniques
L1-Math 2B : Algèbre linéaire et géométrie

ANNÉE 2020-2021
12 mai 2021

Examen
Durée : 2 heures

JUSTIFIER VOS RÉSULTATS ET MONTRER LES CALCULS

(1) **(3 points)** (Question du cours) Soient E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension fini et $f : E \to E$ un endomorphisme.
   (a) Donner les définitions d'une valeur propre et d'un vecteur propre de f.
   (b) Soit λ une valeur propre de f, et soit E_λ l'espace propre de valeur propre λ. Montrer que E_λ est un sous-espace vectoriel de E de dimension ≥ 1.

(2) **(6 points)** Soit $a \in \mathbb{R}$, et soit $f_a : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+3y-2z-w \\ -2x-y-z-3w \\ y+az+aw \end{pmatrix}$$

   (a) Pour chaque valeur de a, déterminer la dimension du noyau $Ker(f_a)$ et de l'image $Im(f_a)$.
   (b) Trouver une base de l'image de f_a pour chaque valeur de a.
   (c) Trouver une base du noyau $Ker(f_a)$ pour chaque valeur de a.
   (d) Pour $a = 1$, trouver une équation paramétrique pour l'ensemble $\{v \in \mathbb{R}^4 | f_1(v) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\}$.

(3) **(4 points)** Soient A et B les matrices carrées suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 5 \\ -1 & 2 & -3 & -5 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

   Déterminer si elles sont inversibles, et trouver les inverses quand ils existent.

(4) **(2,5 points)**. Soit $c \in \mathbb{R}$. Pour chaque valeur de c, trouver le déterminant et le rang de la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 2 & 3 \\ c & 2 & -3 & 1 \\ 0 & c & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(5) **(4,5 points)**. Soit $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire définie par $g(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} x+y \\ y+z \\ x-z \end{pmatrix}$.
   (a) Soit $\mathcal{C} = \{e_1, e_2, e_3\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Déterminer $Mat(g; \mathcal{C})$.
   (b) Soient $v_1 = e_1 - e_2$, $v_2 = e_2 + e_3$, $v_3 = e_1$.
      (i) Montrer que $\mathcal{B} = (v_1, v_2, v_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
      (ii) Déterminer la matrice $Mat(g; \mathcal{B})$.