mercredi 12 mai 2021

Examen

durée : 2h

La calculatrice est interdite

IMPORTANT : Pour obtenir les points aux questions, vous devez rédiger de façon rigoureuse les démonstrations et justifier précisément toutes vos affirmations.

Questions de cours (6 pts)

1. Soit f une fonction définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Soient $x_0 \in \overline{I}$ et $l \in \mathbb{R}$. Donner la définition de : *f a pour limite l quand x tend vers x_0.*
2. Donner l'énoncé du théorème de Rolle.
3. Démontrer le théorème de Rolle (3 pts).
4. Donner l'énoncé du théorème des accroissements finis.

Exercice fait en TD (3 pts)

Soit la fonction $f : \mathbb{R}^* \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(x) = \dfrac{E(x)}{x}$ où $E(x)$ désigne la partie entière de x.

1. Etudier la limite à droite en 0 de f.
2. Etudier la limite à gauche en 0 de f.
3. Etudier la limite en $+\infty$ de f.

Exercice 1 (4 pts)

Donner la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$, en la justifiant rigoureusement, pour :

1. $u_n = n\sin(\frac{1}{\sqrt{n+1}})$
2. $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}$
3. $u_n = \dfrac{n^2 - \cos(n)}{n+2}$
4. $u_n = -3 \times 2^n + (-\dfrac{1}{3})^n$

Exercice 2 (6 pts)

1. On considère la suite $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $b_n = \sin\Big(-(2n+1)\dfrac{\pi}{2}\Big)$.
   Calculer b_0, b_1, b_2. En déduire sans plus de démonstration l'expression des suites extraites $(b_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$ et $(b_{2p+1})_{p\in\mathbb{N}}$.
2. On considère la fonction f définie sur $]0,1]$ par : $f(x) = \sin(\ln x)$ pour tout $x \in]0,1]$.
   En utilisant la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $a_n = e^{-(2n+1)\frac{\pi}{2}}$, montrer que f n'admet pas de limite en 0.
3. On considère maintenant la fonction g définie sur $]0,1]$ par : $g(x) = x\sin(\ln x)$.

(a) Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0. On notera encore g la fonction prolongée. Donner $g(0)$.

(b) Montrer que g n'est pas dérivable en 0 (*on utilisera la question 2*).

(c) La fonction g est dérivable sur $]0,1]$ comme produit et composée de fonctions usuelles dérivables sur $]0,1]$. Calculer sa dérivée g' sur $]0,1]$.

(d) Soit $a \in [0,1]$ et $b \in [0,1]$. Montrer en appliquant le théorème des accroissements finis que : $|g(b) - g(a)| \leqslant 2|b-a|$.

Exercice 3 (4 pts)

1. Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et soit $x \in \mathbb{R}^{+*}$. Ecrire la formule de Taylor Lagrange appliquée à $f(x)$ en 0 à l'ordre 2 (c'est-à-dire avec un polynôme de Taylor en 0 de degré 2).
2. Appliquer la formule que vous avez écrite à la fonction cosinus.
3. En déduire une valeur approchée de $\cos(0,1)$ ainsi qu'une majoration de l'erreur (nous ne demandons pas de calculer ces valeurs sous forme décimale).