Université de Bourgogne
L2 MaPC3A **2020/21**

Examen

17 décembre 2020 ; durée : 2 h

Ex 1. Question de cours.

a) Soit $D \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert et F un champ de vecteur différentiable $F : D \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Donner la définition du jacobien de F et de la divergence de F.

b) Pour $n = 3$ donner la définition du rotationnel de F.

c) Démontrer que si F est deux fois différentiable $\operatorname{div}(\operatorname{rot} F) = 0$.

Ex 2. Calculer le gradient et le laplacien de la fonction $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x) = \langle x \wedge (x \wedge a), a \rangle,$$

où $a \in \mathbb{R}^3$

Ex 3. Déterminer les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivante

$$f(x, y) = x^3 + 9xy^2 + 6y^3 - 3x,$$

et préciser pour chacun d'eux s'il s'agit d'un maximum local, d'un minimum local ou d'un point selle

Ex 4. Calculer l'intégrale

$$\iint_D (2x - y)^2 dxdy,$$

où D est la partie bornée du plan délimitée par les droites d'équation :

$$y = 2; \quad y = 2x; \quad y = x.$$

Ex 5. Determiner l'aire et la position du centre de masse d'un quart d'anneau défini par

$$D = \{(x, y) : \quad x \geq 0, \quad y \geq 0, \quad R^2 \leq x^2 + y^2 \leq 4R^2\}.$$

1/2