Université de Bourgogne

Contrôle Terminal, Janvier 2021 **Licence L1**

Aucun document, calculatrice autorisée - **Durée : 1h30** **MaPC1B**

2020–2021

Exercice 1 – **Équations différentielles de degré 2 (barème approximatif 8 points)**

1. Résoudre l'équation $y'' + 7y' + 6y = 3$
2. Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis, enregistré à l'aide d'un microphone, est représenté sur la figure 1.

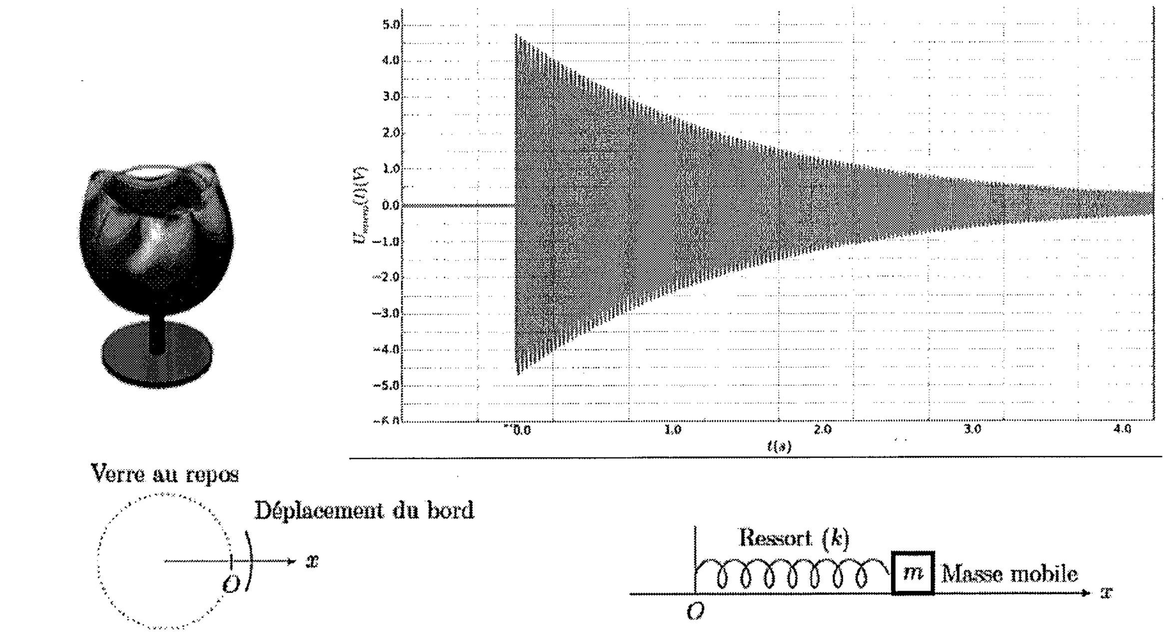

FIGURE 1 – Haut : Modélisation des vibrations d'un verre et chronogramme de l'enregistrement sonore du verre. Bas : Modèle mécanique.

Une étude mécanique montre que le mouvement du bord du verre (repéré par sa position x est régit par l'équation différentielle (admis)

$$\ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad (1)$$

où m est la masse de la portion de verre considérée et α le coefficient des frottements fluides.

(a) Mettre l'équation différentielle sous la forme canonique

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

en précisant les expressions de ω_0 et λ.

(b) On suppose $\lambda < \omega_0$ et on note $\Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$. Établir l'expression de l'amplitude des vibrations $x(t)$. Compte tenu du choc initial avec le marteau, prendre comme conditions initiales $x(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = v_0$.

(c) Quelle est la nature du mouvement (pseudo-périodique, apériodique ou critique) ? On définit le temps caractéristique $\tau = 1/\lambda$. Que représente-t-il ?

(d) L'analyse de l'enregistrement indique une fréquence $f = 540\,\text{Hz}$ et un temps d'amortissement $\tau = 1{,}40\,\text{s}$. En déduire la pulsation $\Omega = 2\pi f$. On définit le facteur de qualité $Q = \omega_0\tau \approx \Omega\tau$ qui donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations avant le retour à l'équilibre. Le calculer.

Exercice 2 – **Nombres complexes (barème approximatif 6 points)**

1. Résoudre l'équation $2z^2 + (3i)z + 2 = 0$.
2. On considère la suite de nombres complexes (z_n) définie par : $z_0 = 0$ et pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = (1+i)z_n - i$.
   (a) Montrer que $z_1 = -i$ et $z_2 = 1 - 2i$
   (b) Calculer z_3
   Par la suite, on note A_1 le point d'affixe z_1, A_2 le point d'affixe z_2 et B le point d'affixe $z_B = 1$.
   (c) Placer B, A_1 et A_2 dans le plan muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.
   (d) Démontrer que le triangle BA_1A_2 est isocèle.
   (e) Démontrer que le triangle BA_1A_2 est rectangle en A_1.

Exercice 3 – **Cinétique chimique (barème approximatif 6 points)**

On suit la cinétique de décomposition du pentoxyde de diazote N_2O_5 en maintenant la température constante à 25 °C. Le bilan de la réaction est :

$$N_2O_5 \rightarrow 2NO_2 + \frac{1}{2}O_2$$

On a mesuré la concentration en N_2O_5 en fonction du temps : .

Temps t en h	0	5,70	11,40	17,10	22,80
$[N_2O_5]_t$ en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$	0,400	0,199	0,101	0,049	0,025

Expérimentalement, on montre que la vitesse de la réaction peut s'écrire :

$$v = k[N_2O_5]_t$$

où $[N_2O_5]_t$ désigne la concentration en pentoxyde de diazote à l'instant t, et k la constante de vitesse de la réaction.

Par définition, la vitesse v s'exprime également grâce à la relation

$$v = -\frac{d[N_2O_5]_t}{dt}$$

1. Montrer que l'on a :
$$\frac{d[N_2O_5]_t}{dt} = -k[N_2O_5]_t$$
2. En déduire l'expression de $[N_2O_5]_t = f(t)$. On notera $[N_2O_5]_0$ la concentration en pentoxyde de diazote initiale.
3. On souhaite déterminer la valeur de la constante de vitesse k à partir d'une mise en graphique simple, une droite. Obtient-on une droite en traçant $[N_2O_5]_t = f(t)$? Sinon, quelle mise en graphique doit-on faire ?
4. Reporter sur votre copie le tableau précédent en indiquant les valeurs à utiliser pour la mise en graphique.
5. À partir d'une régression linéaire ou d'une courbe sur papier millimétré, établir la pente de la droite et en déduire k.