L1

Université de Bourgogne
MathPC2A

Année 2020-2021
12 mai

Epreuve d'algèbre linéaire
Durée : 2h00

Exercice 1.
Transformer la matrice suivante sous forme échelonnée réduite :

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & 1 & -4 \\ 1 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 3 & 5 & 1 \\ -1 & 4 & 6 & 7 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2.
Calculer le déterminant de la matrice suivante et indiquer son rang lorsque ce déterminant est nul

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 4 & a & a \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 3.
Considérons les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^4$:

$$F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \,|\, x - y - 2t = 0, x + t = 0\},$$

$$G = Vect\{a; b; c\} \quad \text{avec} \quad a \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \; b \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}; \; c \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1) Trouver une base de F et de G.
2) Les sous-espaces vectoriels F et G sont-ils supplémentaires ?

Exercice 4.
On considère l'endormorphisme de $\mathbb{R}^3$ défini par

$$f \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y - 4z \\ 2x + 5y - 6z \\ x + 4y - 6z \end{pmatrix}.$$

1) Donner sa matrice A dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
2) Déterminer une base de son image.
3) Déterminer une base de son noyau.
4) Montrer que $\mathbb{R}^3$ est la somme directe du noyau et de l'image de f.
5) Soit $e_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $e_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}$.
Montrer que $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
6) Soit B la matrice de f dans la base $\mathscr{B}$. Calculer la matrice B.
7) Déterminer et factoriser le polynôme caractéristique de A et retrouver le résultat précédent.