UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR Sciences & Techniques L2

Mathématiques MaIE3A
Examen du 16/12/2020 Durée : 2 heures.

Documents, ordinateurs, calculettes et téléphones portables interdits pendant l'épreuve.

Exercice 1

Le plan $\mathcal{P}$ est rapporté à un repère orthonormé $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

1) Soient A, B, C et D les points d'affixes respectives : $z_A = 1 + 2i$, $z_B = 1 + \sqrt{3} + i$, $z_C = \overline{z_B}$, $z_D = \overline{z_A}$

   1-a) Calculer $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}$ et donner son module $|\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}|$.

   1-b) Calculer l'argument de $\frac{z_D - z_B}{z_A - z_B}$. Que peut-on dire des droites BA et BD?

   1-c) Soit I le point d'affixe $z_I = 1$. Calculer les longueurs de IA, IB, IC et ID. Montrer que les points A, B, C et D se trouvent sur un cercle dont on précisera le centre et le rayon.

2) 2-a) Soit $P(z) = z^3 + (-1 + 5i)z^2 + (-1 + 4i)z + 3 + 7i$. Calculer $P(i)$. Déterminer les nombres a, b, c tels que $P(z) = (z - i)(az^2 + bz + c)$.

   2-b) Determiner $\delta = x + iy$ tels que : $\delta^2 = -7 - 24i$ (*On pourra utiliser :* $625 = 25^2$)

   2-c) Soit $Q(z) = z^2 + (-1 + 6i)z - 7 + 3i$. Calculer les racines complexes z_1 et z_2 de Q.

Exercice 2

Soit la courbe paramétrée définie par :

$$M(t) \begin{cases} x(t) &= 1 + t^2 \\ y(t) &= t^2 - t^3 \end{cases}$$

1) Calculer $x'(t)$ et $y'(t)$.

2) Déterminer le point stationnaire. Dessiner l'allure de la courbe en ce point. On précisera le sens de déplacement.

3) Etudier les variations des fonctions $x(t)$ et $y(t)$. On fera un tableau des variations.

4) Etudier les branches infinies en $\pm\infty$.

5) Dessiner la courbe.

Exercice 3

1) Soit $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi x \cos(nx) dx$. Calculer a_0, a_1

2) Calculer $I = \int_e^{e^2} \frac{1}{t \ln t} dt$. On posera $u = \ln t$

3) 3-a) Vérifier que : $\frac{x^3+1}{x^2+3x+2} = x + 3 + \frac{-7x-5}{x^2+3x+2}$

   3-b) Déterminer a, b tels que : $\frac{-7x-5}{x^2+3x+2} = \frac{a}{x+1} + \frac{b}{x+2}$.

   3-c) Calculer : $\int \frac{x^3+1}{x^2+3x+2} dx$

Exercice 4

On étudie la température $T(t)$ à l'instant t d'un objet (t est le temps exprimé en minutes, $T(t)$ en degrés Celsius). $T(t)$ verifie l'équation différentielle :

(E) : $T'(t) + kT(t) = 80$ où $k > 0$ est une constante dépendant de l'objet.

1) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E) et une solution particulière T_p de (E).

2) En déduire $T(t)$ sachant qu'au temps $t = 0$, on a : $T(0) = 20°$C.

Exercice 5

On considère l'équation différentielle (E) : $y" - 4y' + 4y = (x^2 + 1)e^{2x}$.

1) Déterminer les solutions de l'équation homogène (E_0) associée à (E).

2) Déterminer une solution particulière y_p de (E) de la forme $y_p = e^{2x}Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme à chercher.

3) En déduire les solutions de (E)