
Université de Bourgogne U.F.R des Sciences et Techniques
Licence Sciences L1, semestre 1, filière Electronique-Informatique, année 2020/2021.

Examen de Mathématiques MaIE1A, première session, 7 Janvier 2021 (durée : 2h).

Les documents, les calculatrices et tout autre objet électronique ne sont pas autorisés.

Les 4 exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

exercice 1

1. Soit $Q(x)$ un polynôme non nul à coefficients réels. Expliquer pourquoi si le nombre complexe z est racine de $Q(x)$ (c'est-à-dire $Q(z) = 0$), il en est de même de son conjugué \bar{z} .
2. On considère le polynôme $P(x) = x^4 + \alpha x^3 + \beta x^2 + \gamma x + 10$, où α , β et γ sont des nombres réels. On suppose que 1 et 2 sont racines de $P(x)$. On fait l'hypothèse supplémentaire que $a + i$ ($i^2 = -1$), avec a réel positif, est une racine de $P(x)$. Trouver les valeurs de α , β et γ .

exercice 2

1. Déterminer :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan(x^3)(e^{3x} - 1)}{\ln(1 + x^4)}, \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{2 - x^2} - 1}{\ln(x)}.$$

2. Expliquer pourquoi $\lim_{x \rightarrow 0} x^3 \exp(\sin(\frac{1}{x})) = 0$.
3. Calculer :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x), \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} (\sqrt{x^2 + 1} - x), \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \tan\left(\frac{1}{x}\right) \exp(\cos(x)).$$

exercice 3 On considère la fonction $f : x \mapsto (x^2 - 3)e^x$.

1. Quelle est le domaine de définition de f ?
2. Déterminer les limites en $-\infty$ et $+\infty$ de f .
3. Calculer $f'(x)$ et $f''(x)$.
4. Quels sont les points critiques de f ? Etudier les extrema éventuels de f .
5. Montrer que l'équation $f(x) = 0$ a exactement deux solutions réelles.
6. Sur \mathbb{R} , déterminer la primitive de f qui s'annule en 0.

TSVP \rightarrow

1/2

exercice 4

1. Vérifier que $x^2 + x - 2 = (x - 1)(x + 2)$ et que $x^2 + x + 2 = (x + \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}$.
2. Trouver les deux réels A et B tels que $\frac{1}{x^2 + x - 2} = \frac{A}{x - 1} + \frac{B}{x + 2}$. En déduire les primitives $\int \frac{dx}{x^2 + x - 2}$ sur $]1, +\infty[$.
3. Déterminer sur \mathbb{R} , $\int \frac{dx}{x^2 + x + 2}$.
4. Calculer $\int_2^5 x\sqrt{x - 1} dx$.