Contrôle terminal

Les téléphones, calculatrices, autres outils électroniques ou documents ne sont pas autorisés. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. (a) Montrer que les suites $\left(\frac{n^2+1}{n+3}\right)_{n\in\mathbb{N}}, \left(\frac{n^2+3}{n+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent (plus précisément elles convergent vers l'infini).

   (b) Calculer $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n+3}-\frac{n^2+3}{n+5}\right)$ en justifiant les étapes du calcul.

2. Soit la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $a_0=4$, $a_1=1$ et $a_{n+2}=2a_n-a_{n+1}$ pour tout $n\in\mathbb{N}$. Déterminer le terme général de la suite.

3. Pour répondre aux deux questions suivantes, utilisez la convergence/divergence de certaines séries bien connues et traitées dans le cours.

   (a) Montrer que la série $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{(1+n)^2}$ diverge.

   (b) Montrer que la série $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{n+2}{(1+n)^3}$ converge.

4. Pour les deux matrices suivantes, décider si elles sont inversibles, et calculer l'inverse le cas échéant :

$$A=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\3&-5&-5\\-2&3&3\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}1&-2&-3\\3&-5&-5\\-2&3&2\end{pmatrix}$$

   (Pour éviter de faire trop de calculs, regardez : Il n'y a qu'un seul coéfficient qui est différent.)

5. Déterminer l'ensemble des solutions du système d'équations linéaires :

$$\begin{aligned} x\ -2y+z&=a\\ 3x\ -6y+2z&=b\\ 2x\ -4y+3z&=c\end{aligned}$$

   (a) une fois avec $a=1, b=2, c=3$,

   (b) et une fois avec $a=3, b=2, c=1$.

6. Soit

$$A=\begin{pmatrix}1&1&2&3\\2&2&4&7\\2&2&4&6\end{pmatrix}$$

   et soit $f\colon\mathbb{R}^4\to\mathbb{R}^3$ définie par $f(v)=Av$. Trouver une base de $\mathrm{Im}(f)$ et une base de $\mathrm{Ker}(f)$.