

## Examen Terminal - Lundi 3 mai 2021 (45 min.)

2 exercices à traiter - Calculatrices non autorisées

### Exercice 1 : Questions de cours

- On souhaite discrétiser la coordonnée  $x \in [a, b]$  en  $N + 1$  points régulièrement espacés de la quantité  $h$ , appelée pas de discrétisation.
  - 1.1. Donner l'expression de la coordonnée  $x_i$  en fonction de  $a$ ,  $i$  et  $h$ , avec  $i = 1 \dots N + 1$ .
  - 1.2. Donner l'expression de  $h$  en fonction de  $a$ ,  $b$  et  $N$ .
  - 1.3. En TD, 3 différentes manières de discrétiser cette coordonnée  $x$  en langage MATLAB/Octave ont été présentées. En donner la syntaxe pour 2 d'entre elles.
- Soit  $\tilde{x}$  une approximation d'un nombre réel  $x$ .
  - 2.1. Rappeler les définitions de l'erreur absolue  $e_{abs}$  et relative  $e_{rel}$  en fonction de  $x$  et  $\tilde{x}$ .
  - 2.2. Quelle erreur parmi les deux définies ci-dessus est privilégiée pour évaluer la précision d'un résultat et pourquoi?
- On souhaite calculer le polynôme d'interpolation de Lagrange passant par 7 points donnés.
  - 3.1. De quel degré maximum est le polynôme d'interpolation obtenu?
  - 3.2. Quel test simple peut on effectuer pour vérifier que l'expression obtenue pour le polynôme d'interpolation est correcte?
- Citer une méthode numérique pour résoudre une équation du type  $f(x) = 0$ . Pour la méthode citée, quelle information sur la fonction  $f$  est utilisée?
- On souhaite calculer numériquement l'intégrale  $\tilde{I}$  d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$ . Pour cela, on approxime la fonction  $f$  sur cet intervalle par un polynôme de degré 1.
  - 5.1. Comment s'appelle cette méthode? Faites un schéma.
  - 5.2. Que vaut alors l'intégrale approchée  $\tilde{I}$  en fonction de  $a$ ,  $b$ ,  $f(a)$  et  $f(b)$ ?
  - 5.3. Comment s'appelle la méthode numérique qui consiste à calculer numériquement l'intégrale en approximant la fonction  $f$  par un polynôme de degré 2?

### Exercice 2 : Programmation

**Rappel :** le calcul de la dérivée première numérique par différences finies centrées d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $[a, b]$  est donnée par l'expression

$$f'(x_i) = \frac{f(x_{i+1}) - f(x_{i-1}))}{2h}$$

avec  $x_i$  la variable  $x$  discrétisée sur l'intervalle  $[a, b]$  et  $h$  le pas de discrétisation.

- Écrire la fonction MATLAB/Octave d'en-tête fonction `df=deriv1cf(f, a, b, N)` qui effectue le calcul de la dérivée numérique à partir de la formule donnée ci-dessus. Les entrées de la fonction `deriv1cf` sont : la fonction  $f$ , les valeurs des extrémités de l'intervalle  $[a, b]$  et le nombre de segments de discrétisation  $N$ . La sortie de la fonction `deriv1cf` est le vecteur  $df$  qui contient les valeurs de la dérivée de  $f$  aux points discrétisés de l'intervalle  $[a, b]$ .
- Écrire la partie `%TEST` sur l'exemple  $f(x) = \sin(x)$  sur l'intervalle  $[0, 2\pi]$  avec  $N = 100$ .
- Écrire la partie `%GRAPHE` pour tracer la fonction  $f(x)$ , sa dérivée numérique `df` et sa dérivée exacte  $f'(x) = \cos(x)$ .