EXAMEN L2, MODULE INFO3A

D. Michelucci

14 décembre 2020

1 Arithmétique [1]

1. $a = 30, b = 16$. Calculer $u \in \mathbb{Z}$ et $v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = PGCD(a, b)$ avec l'algorithme d'Euclide généralisé, avec la présentation en tableau. Les colonnes sont : $a, b, a \bmod b, q = a \div b, PGCD, u, v$. La dernière ligne contient 1 dans la colonne u et k dans la colonne v.

2. Soient a, b deux entiers naturels non nuls donnés. Présentez les deux méthodes permettant de calculer, s'il existe, $\alpha \in \mathbb{N}$ tel que $\alpha a \bmod b = 1$.

3. Donnez une formule pour le k ième chiffre après la virgule de $1/D$ ($D \geq 1 \in \mathbb{N}$) en base B (le premier chiffre est le 1 ième). Vous noterez $a \div b$ ou $\lfloor a/b \rfloor$ la division entière (ou euclidienne) de a par b. Exemple : en base $B = 10$, $1/7 = 0.142857$, donc le 1 ième chiffre est 1, le 2 ième est 4, etc.

2 Arbre couvrant de coût minimal [2]

Arthur propose un algorithme pour le calcul de l'arbre couvrant de coût minimal d'un graphe non orienté connexe G, d'arêtes A et de sommets S. Il suppose que les coûts des arêtes sont tous différents. Il note $\alpha(s)$ l'arête incidente en $s \in S$ qui est de coût minimal, et $E = \cup_{s \in S}\ \alpha(s)$. Il conjecture que E est l'arbre couvrant de coût minimal de G : E couvre bien tous les sommets de G, et E a bien au plus $|S| - 1$ arêtes car l'arête IJ de coût minimal est $\alpha(I) = \alpha(J)$.

1. Arthur prouve aussi que E n'a pas de cycle. Comment ? Indication : soit $\ldots T, U, V, W, \ldots$ un cycle, et UV a le coût le plus grand des arêtes du cycle. Explicitez la contradiction.

2. Cependant, l'algorithme d'Arthur est incorrect. Proposez un contre-exemple simple. Un graphe de 4 sommets et 3 arêtes suffit.

[1] Deux points/question.
[2] Deux points/question

3 Etude de complexité [3]

Le temps d'exécution $T(n)$ d'un algorithme, pour une donnée de taille n, est : $T(1) = 1, T(n) = 3T(n/2) + n$.

1. Calculez $T(2), T(4), T(8)$.
2. On suppose $n = 2^k$. Quelle est la matrice M telle que :

$$\begin{pmatrix} n \\ T(n) \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} n/2 \\ T(n/2) \end{pmatrix}$$

3. Que vaut p dans

$$\begin{pmatrix} n \\ T(n) \end{pmatrix} = M^p \begin{pmatrix} 1 \\ T(1) \end{pmatrix}$$

4. Soient λ, λ' les deux valeurs propres de M, avec $|\lambda| > |\lambda'|$. Que valent λ, λ' ?
5. Il existe deux constantes a et b telles que $T(n) = a\lambda^k + b\lambda'^k$, quand $n = 2^k$. Que valent a et b ? Vérifiez que cela est cohérent avec la première question.
6. Que vaut x dans $T(n) = O(n^x)$?

4 Problème de flot [4]

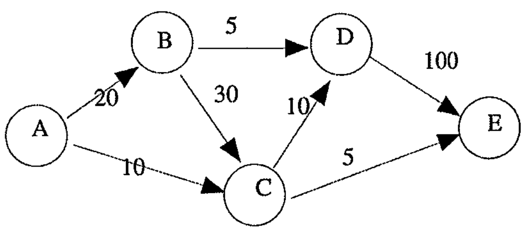

Figure 1: Capacité des arcs.

Il existe un flot de débit 20 de A à E dans le graphe de la figure 1.

1. Prouvez l'existence en donnant les débits dans les arcs.
2. Prouvez la maximalité en donnant une coupe de capacité 20.

[3] Un point / question
[4] Deux points / question