Université de Bourgogne, Mathématiques — Année universitaire 2020–2021

Géométrie des courbes et des surfaces (LMo6G1)

Examen final

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La concision et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Sauf mention contraire, toute réponse apportée devra être soigneusement justifiée.

Exercice 1 (Courbes de Bertrand).
Soit I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et soit $\alpha : I \to \mathbb{R}^3$ une courbe paramétrée birégulière. On note $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ son repère de Frenet, κ sa courbure et τ sa torsion.

(1) Rappeler la définition du repère $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$, et énoncer (sans les démontrer) les équations de Frenet.

La droite normale à α à l'instant $t \in I$ est la droite affine passant par le point $\alpha(t)$ et dirigée par le vecteur $\mathrm{N}(t)$. On dit que α est *une courbe de Bertrand* si elle a la propriété suivante :

($\mathcal{B}$) « Il existe une autre courbe birégulière $\tilde{\alpha} : I \to \mathbb{R}^3$, distincte de α, qui possède la même droite normale que α à tout instant $t \in I$ ».

On suppose dans la suite que $\tau(t) \neq 0$ pour tout $t \in I$.

(2) Justifier que, si α a la propriété ($\mathcal{B}$), alors il existe une fonction $c : I \to \mathbb{R}$ telle que $\tilde{\alpha}(t) = \alpha(t) + c(t) \cdot \mathrm{N}(t)$ pour tout $t \in I$. Calculer ensuite $\tilde{\alpha}'$ dans le repère de Frenet $(\mathrm{T}, \mathrm{N}, \mathrm{B})$ de la courbe α, et en déduire que cette fonction c est constante non-nulle.

(3) Montrer que, si α est une courbe de Bertrand, alors il existe des constantes $c \in \mathbb{R}^*$ et $\theta \in \mathbb{R}$ telles que

$$\forall t \in I, \qquad \begin{cases} \cos(\theta) = \dfrac{1 - c\kappa(t)}{\sqrt{\left(1 - c\kappa(t)\right)^2 + \left(c\tau(t)\right)^2}}, \\[2ex] \sin(\theta) = \dfrac{c\tau(t)}{\sqrt{\left(1 - c\kappa(t)\right)^2 + \left(c\tau(t)\right)^2}}. \end{cases}$$

Indication : on pourra considérer le vecteur tangent unitaire $\tilde{\mathrm{T}}$ de la courbe $\tilde{\alpha}$ donnée par la propriété ($\mathcal{B}$), montrer que $\langle \mathrm{T}, \tilde{\mathrm{T}} \rangle$ est constante puis utiliser le calcul de $\tilde{\alpha}'$ fait en (2).

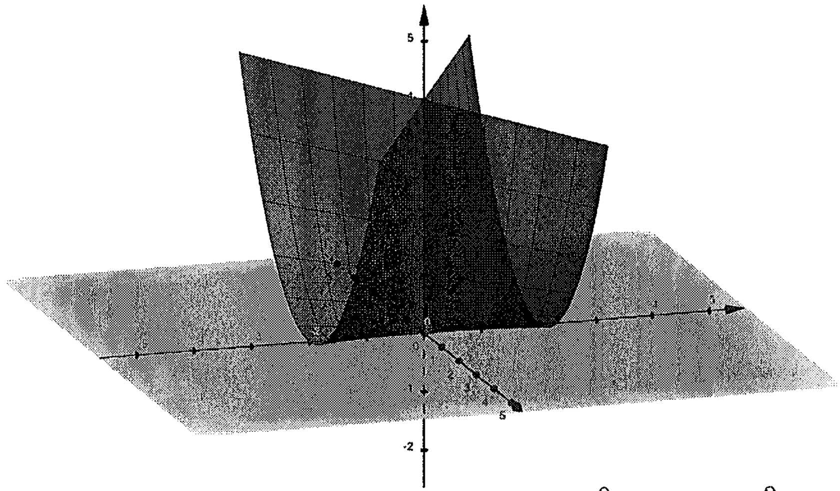
(4) Montrer l'implication suivante : si α est une courbe de Bertrand, alors il existe des constantes $u \in \mathbb{R}^*$ et $v \in \mathbb{R}$ telles que $u \cdot \kappa(t) + v \cdot \tau(t) = 1$ pour tout $t \in I$.
Indication : on pourra calculer $\operatorname{cotan}(\theta)$ où θ est la constante donnée par la question (3).

(5) Démontrer la réciproque de l'implication étudiée dans la question (4).

(6) Énoncer (sans les démontrer) les théorèmes de Lancret et de Puiseux.

(7) À quelle condition nécessaire et suffisante une hélice α est-elle une courbe de Bertrand ?

Exercice 2 (Étude locale du parapluie de Whitney).
On considère la nappe paramétrée $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $\varphi(u,v) := (uv, u, v^2)$ et dont le support $S := \varphi(\mathbb{R}^2)$ est appelé *parapluie de Whitney*. En voici une illustration partielle :



On fixe un point $(r,s) \in \mathbb{R}^2$, et on note $p := \varphi(r,s) \in S$, $f := \dfrac{\partial \varphi}{\partial u}(r,s)$, $g := \dfrac{\partial \varphi}{\partial v}(r,s)$.

(1) Pour quelle(s) valeur(s) de (r,s) le point p est-il un point singulier de φ ?

On suppose dans la suite que p est un point régulier de φ.

(2) Calculer la matrice de la première forme fondamentale I_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(3) Calculer la matrice de la seconde forme fondamentale II_p de S dans la base (f,g) de $\overrightarrow{T_pS}$.

(4) Calculer la courbure de Gauss K_p de S au point p, et en déduire la nature du point p (parabolique/elliptique/hyperbolique) en distinguant les cas si nécessaire.

Exercice 3 (Étude globale du parapluie de Whitney).
On considère le sous-ensemble $S \subset \mathbb{R}^3$ qui a été introduit dans l'Exercice 2, et on se propose ici de l'étudier globalement.

(1) Trouver un polynôme $R \in \mathbb{R}[X,Y,Z]$ de degré 3 tel que S est contenu dans le lieu des zéros $N := R^{-1}(\{0\})$ de R, puis déterminer le complémentaire $N \setminus S$.

(2) Donner deux courbes paramétrées $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ et $\beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ avec les propriétés suivantes : *(i)* α, β sont planes et leurs supports $\alpha(\mathbb{R}), \beta(\mathbb{R})$ sont des paraboles ; *(ii)* on a $\alpha(\mathbb{R}) \subset S$, $\beta(\mathbb{R}) \subset S$ et $\alpha(\mathbb{R}) \cap \beta(\mathbb{R}) = \varnothing$; *(iii)* la surface réglée de courbes directrices α et β admet S pour support.

(3) Donner un exemple de sous-ensemble $C \subset \mathbb{R}^3$ qui est aussi le lieu des zéros d'un polynôme, est aussi le support d'une surface réglée définie par deux paraboles, mais n'est pas homéomorphe à S.