Licence Sciences Technologies Santé
L2 - Elec4A

Université de Bourgogne
Traitement du Signal

Contrôle final – *Transformées de Fourier, échantillonnage et filtrage discret*
Durée 2h – calculatrice et une feuille A4 manuscrite R/V autorisés

- **Exercice 1** – *Transformée de Fourier continue*

On se propose d'étudier ici le comportement "passe-bas" ou "passe-haut" de fenêtres temporelles dans l'espace de Fourier, fenêtres utilisées notamment dans l'opération de convolution (continue).

1.1 Tracez $h_a(t)$ et calculez sa TF. Tracez module et phase pour $a = 4$. Interprétez.

$$h_a(t) = \begin{cases} 1/a & \text{si } t \in [-a/2; a/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

1.2 Tracez $g_a(t)$ et calculez sa TF. Tracez module et phase pour $a = 4$. Interprétez et comparez avec le cas précédent.

$$g_a(t) = \begin{cases} 1/a & \text{si } t \in [-a/2; 0] \\ -1/a & \text{si } t \in [0; a/2] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Rappel :

$$\cos p + \cos q = 2\cos(\frac{p+q}{2}) \times \cos(\frac{p-q}{2})$$
$$\cos p - \cos q = -2\sin(\frac{p+q}{2}) \times \sin(\frac{p-q}{2})$$

- **Exercice 2** – *Fonction de transfert*

Soit le système du 1er ordre passe-bas $H(\omega) = \frac{\omega_c}{\omega_c + j\omega}$. Si le signal d'entrée $e(t) = Ve^{j\omega t}$, alors le signal de sortie $s(t) = H(\omega)e(t)$.

A.N. pour les questions ci-dessous : $\omega_c = 1000 rd.s^{-1}, V = 2$.

2.1 Quelle est la réponse du système au signal $e(t) = V\sin(\omega_0 t)$ avec $\omega_0 = 500 rd.s^{-1}$? Dessinez sommairement le signal d'entrée et le signal de sortie.

2.2 Quelle est la réponse du système au signal $e(t) = V[\sin(\omega_0 t) + \sin(3\omega_0 t)] + \sin(5\omega_0 t)]$ avec $\omega_0 = 500 rd.s^{-1}$? Dessinez sommairement les composantes du signal d'entrée et celles du signal de sortie. Quel est l'intérêt du filtrage sur ce signal ? ω_c est-elle bien choisie dans ce cas ?

- **Exercice 3** – *Echantillonnage*

3.1 Quelle fréquence d'échantillonnage choisir pour le signal $s(t) = 2\cos[2\pi(f_1 - K\sin(2\pi f_2 t))t]$ afin de le représenter correctement, sans perte d'information sur le contenu fréquentiel, dans sa version discrète ?

3.2 Idem pour le signal $s(t) = sin(250t) + sin(3\omega t)$

3.3 Idem pour le signal $s(t) = 6 + sin(\omega_1 t)sin(7\omega_2 t)$

3.4 Dessinez le signal échantillonné (fréquence f_e) à partir du signal carré continu de fréquence de motif f_0 avec $f_e = 10f_0$. Quel est le contenu fréquentiel de la version échantillonnée ? (l'équation exacte n'est pas demandée, seulement une discussion-description).

• **Exercice 4** – *Transformée de Fourier à Temps Discret*

4.1 Soit la fenêtre-filtre $h_1[k] = \{..., 0, \underline{1}, -1, 0, ...\}$. Calculez et représentez sa TFTD.

4.2 Soit la fenêtre-filtre $h_2[k] = \{..., 0, 1, -\underline{2}, 1, 0, ...\}$. Calculez et représentez sa TFTD.

4.3 Comparez et analysez les deux résultats précédents. Si ces filtres sont appliqués (convolution discrète) à des signaux, quelle sera l'allure des résultats (pas de calculs) ? Quelles sont les opérations équivalentes dans le domaine continu ?

• **Exercice 5** – *Transformée de Fourier Discrète*

5.1 Soit le signal discret $s[k]$ de longueur N et de fréquence d'échantillonnage f_e. Etablissez le dictionnaire des fréquences qui permettra de représenter le contenu fréquentiel de ce signal à l'aide de la TFD. Application : $s[k] = \sin(2\pi 30kT_e)$, $N = 10$, $f_e = 100Hz$.

5.2 Idem avec $s[k] = \sin(2\pi 15kT_e)$. Illustrez par une forme probable du résultat (spectre) de la TDF (en module).

5.3 Quels sont les avantages et inconvénients de la TFD dans l'interprétation du contenu fréquentiel d'un signal ?