UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
UFR DE SCIENCES ET TECHNIQUES
DÉPARTEMENT IEM

LICENCE DE SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR
PARCOURS MÉCANIQUE ET ÉLECTRONIQUE

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES

ÉVALUATION TERMINALE
PREMIÈRE SESSION

Durée : 1H50
Documents autorisés : reproduction papier des diapositives de cours et notes manuscrites personnelles

Liminaires

Inscrivez sur votre copie d'examen, et recopiez sur vos feuilles annexe et intercalaires éventuelles, dans les cases **N° d'anonymat**, un **pseudonyme** composé de trois lettres et trois chiffres tous différents que vous choisirez à votre guise.

Si vous utilisez des feuilles intercalaires, numérotez $1R$ le *recto* de la première et $1V$ son *verso*, $2R$ le *recto* de la deuxième et $2V$ son *verso*, etc... Reportez, dans la case prévue à cet effet sur la copie double, le nombre d'intercalaires utilisées sans compter la feuille annexe.

Si vous êtes amené à utiliser à plusieurs reprises des méthodes numériques propres à un domaine particulier, il vous est demandé de montrer l'étendue de vos connaissances en variant les méthodes employées.

1 Questions de cours

1.1 Questionnaire simple

Donnez une réponse courte (un mot, une phrase ...) aux questions suivantes.

1.1.1 Quel est l'ordre du modèle épidémiologique *SIR* ?

1.1.2 Quelle norme régit le codage des nombres réels ?

1.1.3 Quel est l'intérêt de la méthode de décomposition LU sur la méthode de GAUSS ?

1.1.4 Citez une méthode de résolution d'un système d'équations linéaires.

1.1.5 Quelle est la définition de l'*epsilon machine* ?

1.1.6 Existe-t-il des méthodes analytiques de recherche des racines de polynômes à une inconnue de degré 7 ?

1.1.7 Pourquoi doit-on parfois résoudre numériquement une équation différentielle ?

1.1.8 Quelle astuce algorithmique permet de réutiliser les calculs antérieurs lors des itérations de la méthode des trapèzes ?

1.1.9 Quelles sont les limites du type *integer* ?

1.1.10 Qu'appelle-t-on un point de GAUSS ?

1.1.11 Quelle type de méthodes numériques permet de déterminer la valeur moyenne d'une fonction entre deux bornes ?

1.1.12 Qu'est ce que l'ordre d'une équation différentielle ordinaire ?

1.1.13 Quelle propriété définit les polynômes de LAGRANGE ?

1.1.14 Qu'est ce qui différencie la méthode des trapèzes de la méthode de SIMPSON ?

1.2 Règle et crayon

Reportez, sur la feuille annexe, les trois premières positions, notées $X_N^{\{0\}}$, $X_N^{\{1\}}$ et $X_N^{\{2\}}$, de la recherche du zéro de la fonction $f(x)$ par la méthode de NEWTON.

2 Programmation : Synchronie

2.1 Présentation

En 1665, Christian HUYGENS observa que deux horloges à pendule fixées sur un même mur se synchronisaient à terme, bien que leurs périodes ne puissent être rigoureusement identiques.

Ce phénomène est nommé « synchronie des horloges ».

Il fait l'objet de nombreuses vidéos mettant par exemple en œuvre des métronomes placés sur un plateau mobile.

Dans un article[1] publié en 1975, Yoshiki KURAMOTO présente un modèle simple de synchronisation d'oscillateurs non linéaires couplés reproduisant ce phénomène.

1. Self-Entrainement of a population of coupled non-linear Oscillators, Lecture Notes in Physics, International Symposium on Mathematical Problems in Theoretical Physics. 39. Springer-Verlag, New York. p. 420.

On se propose ici d'étudier une version simplifiée de ce modèle.

Soit un système de n oscillateurs x_i, $i \in \{0, n-1\}$ tels que $x_i = X_i^A \sin(\theta_i)$ où X_i^A est l'amplitude de l'oscillateur et θ_i son angle.

θ_i varie au cours du temps selon la loi : $\dot{\theta}_i = \omega_i - \sum_{j=0}^{n-1} k_{ij} \sin(\theta_j - \theta_i)$

où ω_i est la pulsation propre de l'oscillateur et k_{ij} caractérise le couplage entre l'oscillateur i et l'oscillateur j. Les conditions initiales s'écrivent $\theta_i(0) = \varphi_i$.

Dans ce modèle, X_i^A, ω_i et φ_i sont constants.

Pour la suite de cet énoncé :

— $n = 2$, sauf indication contraire ;

— les paramètres constants (X_i^A, ω_i, φ_i, k_{ij}) seront définis par des directives de compilation `#define` en début de programme.

Sauf indication contraire, dans les exercices qui suivent, les valeurs de ces paramètres seront :

— $X_0^A = 1{,}0$, $X_1^A = 1{,}2$;

— $\omega_0 = 3{,}0$, $\omega_1 = 3{,}1$;

— $\varphi_0 = 0$, $\varphi_1 = 0{,}5$;

— $k_{ii} = 0$, $k_{ij} = 0{,}2$ pour $i \neq j$.

De même, la durée de simulation par défaut sera de 100 secondes pour un pas temporel de 10 millisecondes.

2.2 Étude

2.2.1 Question préliminaire

Quelle est l'influence de la valeur des coefficients k_{ii} sur le comportement du modèle ?

2.2.2 Tracé de courbes

Afin de représenter graphiquement les courbes[2], concevez un programme en langage C qui enregistre dans le fichier textuel `courbes.dtx` - ou à défaut affiche sur l'écran - les valeurs des oscillateurs à des intervalles de temps réguliers, à raison d'un instant par ligne, en respectant le format :

$t \qquad x_0^{\{t\}} \qquad x_1^{\{t\}}$

Par simplification, on supposera que, pour cet exercice, chaque oscillateur suit la loi $\theta_i = \omega_i t + \varphi_i$, correspondant à des coefficients k_{ij} tous nuls.

2. *e.g.* avec l'outil `gnuplot`.

2.2.3 Monosynchronisation

Dans cet exercice, $k_{10} = 0$.

2.2.3.1 Analyse

Explicitez les équations du modèle et indiquez quelle proposition parmi les suivantes est vraie :

1. les deux oscillateurs sont linéaires et suivent la même loi que dans l'exercice §2.2.2 ;
2. l'un des oscillateurs est linéaire et l'autre est non-linéaire ;
3. les deux oscillateurs sont non-linéaires.

2.2.3.2 Programmation

Modifiez le programme de l'exercice §2.2.2 afin de simuler ce modèle.

2.2.4 Bisynchronisation

Écrivez le programme en langage C permettant de simuler le comportement de deux oscillateurs respectant le modèle simplifié de KURAMOTO.

2.2.5 Multisynchronisation

Exposez quelles modifications vous apporteriez au programme de l'exercice §2.2.4 afin de simuler le comportement d'un nombre élevé (*e.g.* ≥ 1000) d'oscillateurs ?

Il n'est pas demandé d'écrire le programme C.

N° d'anonymat

Méthode de Newton