L3 méca

Université de Bourgogne *Licence de Mathématique et de Mécanique*
Département de Mathématiques *Cours Calcul Scientifique*

Examen du 19 mai 2021

Durée deux heures, les documents et les téléphones portables sont interdits

1. *Séries de Fourier* (6) :
   Soit pour $x \in [-\pi, \pi]$
   $$f(x) = \begin{cases} 0 & x \geq 0 \\ -x & x < 0 \end{cases}$$
   et $f(x + 2\pi n) = f(x)$, $n \in \mathbb{Z}$.
   (a) Donner le graphe de $f(x)$ pour $|x| \leq 3\pi$.
   (b) Calculer les coefficients c_k, $k \in \mathbb{Z}$, de la série de Fourier. Donner les coefficients avec indices paires et impaires.
   (c) En conclure la décroissance des coefficients pour $k \to \infty$.
   (d) Donner la somme de la série pour $x = 0$. En conclure que
   $$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$
2. *Équation de Poisson* (8) :
   (a) Résoudre analytiquement pour $x \in [-1, 1]$ l'équation
   $$u''(x) + \pi^2 u(x) = \pi^2 x^2, \quad u(-1) = 1 - 2/\pi^2, \quad u'(1) = 0. \tag{1}$$
   (b) Écrire un code en Matlab pour calculer la solution de (1) numériquement. Utiliser le code cheb.m pour les matrices de différenciation. Prendre $N = 32$ polynômes, donner le graphe de la solution, calculer la norme de la différence avec la solution exacte.
3. *Stabilité et méthode de Heun* (3) :
   La méthode de Heun pour l'équation différentielle $y' = f(t, y)$ avec $t_{n+1} - t_n = h$ et $y_n := y(t_n)$ est donnée par
   $$\begin{aligned} K_1 &= f(t_n, y_n), \\ K_2 &= f(t_{n+1}, y_n + hK_1), \\ y_{n+1} &= y_n + \frac{h}{2}(K_1 + K_2). \end{aligned}$$

Donner les conditions de stabilité pour cette méthode. En conclure (en comparant avec la solution exacte pour le problème $y' = \lambda y$) que la méthode est de deuxième ordre.

4. *Équation de la chaleur* (3) :
L'équation de la chaleur prend la forme

$$\frac{\partial \psi(x,t)}{\partial t} - \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} = 0, \quad \psi \in \mathbb{C}.$$

Donner les conditions aux limites $x = \pm\pi$ pour assurer une solution périodique sur tout $\mathbb{R}$. En utilisant des séries de Fourier, donner la solution du problème de Cauchy pour les conditions initiales $\psi(x,0) = f(x)$ où $f(x) = f(x + 2\pi k)$, $k \in \mathbb{Z}$.