Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2021

CALCUL INTÉGRAL - EXAMEN (2 heures)

Dans tous les exercices, pour $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, on désigne par $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ la tribu des boréliens de $\mathbb{R}^d$ et par λ_d la mesure de Lebesgue sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$.

I

Sur la tribu $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ on considère la mesure produit $\mu = \lambda_1 \otimes \delta_1$, où δ_1 désigne la mesure de Dirac au point $1 \in \mathbb{R}$.

1. Si $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, rappeler sans démonstration la valeur de $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} f \, d\delta_1$.
2. Calculer l'intégrale par rapport à la mesure μ de :
   (a) la fonction caractéristique du disque fermé D de centre $(0,0)$ et de rayon 2 ;
   (b) la fonction $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x,y) = \dfrac{y}{2x^2+y^2+1}$.

II

Pour $p \in \mathbb{N}^*$, on pose

$$I_p = \iint_D f_p(x,y) \, d\lambda_2(x,y),$$

où D est le quart de plan des coordonnées positives, et $f_p\colon D \to \mathbb{R}$ est la fonction définie par $f_p(x,y) = \dfrac{1}{(x^2+y^2+p^2)^2}$. À l'aide d'un changement de variable approprié :

1. Montrer, sans donner sa valeur, que I_1 est finie. En déduire $\lim\limits_{p \to +\infty} I_p$.
2. Calculer I_p. Montrer que l'on retrouve ainsi le résultat de la question précédente.

III

On rappelle que la suite des ***intégrales de Wallis*** est définie par

$$W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x \, dx, \text{ pour } n \in \mathbb{N}.$$

On ne suppose pas connu dans cet exercice d'équivalent "classique" de W_n quand $n \to +\infty$. On considère également la fonction

$$H\colon [-1,1[\to \mathbb{R} \text{ définie par } H(t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1 - t\sin x}.$$

1. Montrer que la fonction H est bien définie et continue sur $[-1,1[$.
2. Montrer que H est dérivable sur $[-1,1[$. Calculer sa dérivée H' et étudier le sens de variation de H sur $[-1,1[$.
3. Montrer que pour tout $t \in]-1,1[$ on a $H(t) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} W_n t^n$.
4. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1-\sin x}$ n'est pas intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$.
5. En déduire que la série de terme de général W_n diverge et déterminer $\lim\limits_{t \to 1} H(t)$.
6. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive, décroissante, et de limite nulle. En déduire que la série de terme général $(-1)^n W_n$ converge.
7. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{1}{1+\sin x}$ est intégrable sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ et calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{dx}{1+\sin x}$ (on pourra poser $u = \tan\dfrac{x}{2}$ et donc $dx = \dfrac{2\,du}{1+u^2}$).
8. En raisonnant sur la suite de fonctions $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies sur $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right[$ par $S_n(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sin^k x$, déduire des questions précédentes la valeur de $S = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n W_n$.

1/1