Université de Bourgogne
Département de Mathématiques - L3

Janvier 2021

# CALCUL DIFFERENTIEL - CONTRÔLE TERMINAL

*Les exercices sont indépendants, et peuvent être traités dans n'importe quel ordre. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation.*

## I

Soit $V = ]0, +\infty[^3$ et $H \colon V \to \mathbb{R}^3$ l'application définie par

$$H(x, y, z) = (u, v, w) = (xy, yz, xz).$$

1. Montrer que $H(V) = V$.
2. Montrer que $H$ est un difféomorphisme de classe $\mathcal{C}^1$ de $V$ sur $H(V)$.
3. En utilisant le changement de coordonnées $H$, et la fonction $F$ définie par $F \circ H = f$, résoudre dans $\mathcal{C}^1(V)$ l'équation suivante :
$$x\frac{\partial f}{\partial x} - y\frac{\partial f}{\partial y} + z\frac{\partial f}{\partial z} = 2xz.$$

## II

Soit $C \subset \mathbb{R}^p$, qu'on suppose compact et convexe. Soit $f \colon C \to C$ une application telle que $\|f(x) - f(y)\| \leq \|x - y\|$ pour tout $(x, y) \in C^2$. On veut montrer que $f$ admet un point fixe dans $C$. Pour cela, on choisit un point $a \in C$ et on définit la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ d'applications de $C$ dans $\mathbb{R}^p$ par $f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f(x) + \frac{1}{n} a$.

1. Montrer que $f_n(C) \subseteq C$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que, pour chaque $n \geq 1$, l'application $f_n$ est strictement contractante et donc possède un point fixe unique $c_n \in C$.
3. Conclure.
4. Montrer sur un exemple que ce point fixe fe $f$ n'est pas nécessairement unique.

## III

On considère l'ensemble $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^3$ défini par $\mathcal{S} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y - z - x^2 + x^3 = 0\}$.

1. Montrer que $\mathcal{S}$ est en tout point une sous-variété de dimension 2 de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{C} = \{(t, t^2, t^3) \in \mathbb{R} : t \in \mathbb{R}\}$ est une courbe, c'est à dire en tout point une sous-variété de dimension 1 de $\mathbb{R}^3$. Pour $t_0 \in \mathbb{R}$, déterminer l'espace tangent à $\mathcal{C}$ au point $M(t_0) = (t_0, t_0^2, t_0^3)$.
3. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la droite $\mathcal{D}_t$ passant par le point $M(t) = (t, t^2, t^3)$ et dirigée par le vecteur $u = (0, 1, 1)$ est contenue dans $\mathcal{S}$.
4. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, les plans tangents à $\mathcal{S}$ en deux points quelconques de la droite $\mathcal{D}_t$ sont parallèles.