Université de Bourgogne
Année universitaire : 2020/2021

Licence 3 SPI

Examen d'Automatique/Robotique

Durée : 2H.
1 feuille A4 recto verso autorisée.

Exercice 1

Soit le système non linéaire suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -3x_2 \\ \dot{x}_2 = -5x_1^2 - 2x_2 + u \end{cases} \qquad (1)$$

1) Démontrer que le triplet $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (\sqrt{1/5}, 0, 1)$ correspondant à un point de fonctionnement.
2) Démontrer que la linéarisation du système (1) autour du point de fonctionnement $(x_1^*, x_2^*, u^*) = (\sqrt{1/5}, 0, 1)$ donne le système linéaire suivant :

$$\begin{bmatrix} \delta\dot{x}_1 \\ \delta\dot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2\sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x_1 \\ \delta x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \delta u \qquad (2)$$

Nous pouvons écrire le nouveau système linéarisé sous la forme suivante :

$$\begin{bmatrix} \dot{X}_1 \\ \dot{X}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ -2\sqrt{5} & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} U \qquad (3)$$

Où $X = \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$ est le nouveau vecteur de variables d'état et U est la nouvelle commande.

3) Analyser la stabilité du système (3).
4) Trouver le gain $K = [k_1 \quad k_2]$ de la commande $u=-KX$ qui stabilise le système (3). Les pôles désirés du système stabilisé sont (-2, -1).

Concernant la sortie (mesure) du système, nous avons 2 cas : a) $Y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = X_1$

b) $Y = X_1 + 3X_2$

5) Analyser l'observabilité du système dans les deux cas et donner la partie observable dans chacun des deux cas.
6) concevoir un observateur de Luenberger pour le cas (a). Les pôles désirés de l'observateur sont (-2, -1). Le choix de ces pôles par rapport à la commande précédente est-il judicieux ? Justifier.

Exercice 2

Soit le système linéaire suivant :

$$\dot{X}(t)=\begin{bmatrix}\dot{X}_1(t)\\ \dot{X}_2(t)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & -5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1(t)\\ X_2(t)\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}13\\ 0\end{bmatrix}U(t) \qquad (4)$$

1) Est ce que la variable $X_2(t)$ est commandable? Justifier.

2) Donner l'expression de la solution $X(t)=\begin{bmatrix}X_1(t)\\ X_2(t)\end{bmatrix}$ dans le cas d'une entrée quelconque, un $t_0=0$ et un état initial $X(t_0)=\begin{bmatrix}1\\ 2\end{bmatrix}$.

3) Donner la solution $X_1(t)$ dans le cas : $U(t)=\begin{cases}1 & t\geq 0\\ 0 & t<0\end{cases}$ (5)

4) Donner la solution $X_2(t)$ dans le cas discret pour une période d'échantillonnage T_e.