.L3 Maths.

2020/21

Analyse Numérique (LM64)

Examen final (8 janvier 2021)

Temps : 3h00

1. (Méthodes itératives) [**5 points**]
   Soient A et $P \in M_n(\mathbb{R})$ matrices inversibles et $b \in \mathbb{R}$. Dans le contexte du problème $Ax = b$, soit la suite définie par

$$\begin{cases} x^{(0)} = x_0 \\ x^{(k+1)} = Bx^{(k)} + c \end{cases}$$

   avec $B = I_n - P^{-1}A$ et $c = P^{-1}b$. On considère la matrice, avec $a, b \in \mathbb{R}$ ($a > 0$, $b > 0$) arbitraire

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ -b & a \end{pmatrix} .$$

   i) Étant fixée la valeur b, déterminer les valeurs de a pour lesquelles chacune des méthodes suivantes converge : Richardson [**2.5 points**], Jacobi [**1 point**] et Gauss-Seidel [**1 point**].
   ii) Pour quelle méthode la convergence est la "plus rapide" ? Est-ce qu'il existe un choix du paramètre qui rend la convergence de la méthode de Richardon plus rapide que celle de Jacobi ? [**0.5 points**].

2. (Stabilité de valeurs propres) [**6 points**]
   i) Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ diagonalisable et $A(\epsilon) = A + \epsilon C$, avec $C \in M_n(\mathbb{C})$ et $\epsilon > 0$. Énoncer et démontrer le résultat de stabilité des valeurs propres de A sous la perturbation ϵC en termes de la norme $||\cdot||_\infty$ de C. [**3 points**]
   ii) Étant donnée une matrice $O \in M_n(\mathbb{R})$ orthogonale, c'est à dire, $OO^t = \mathbb{I}_n$, et la matrice diagonale $C \in M_n(\mathbb{C})$ donnée par

$$C = \begin{pmatrix} \alpha_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \alpha_2 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_n \end{pmatrix}$$

   avec $\alpha_i \in \mathbb{C}, \forall i \in \{1, \dots, n\}$, et $\alpha_i \neq 0$ au moins pour un $i \in \{1, \dots, n\}$, donner une condition suffisante sur $\epsilon > 0$, en fonction des valeurs $\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ et $n \in \mathbb{N}$, pour garantir que la matrice

$$O(\epsilon) = O + \epsilon C ,$$

   soit inversible. [**3 points**]

3. (Systèmes non-linéaires) [**4 points**]
   i) Énoncer le théorème de Newton-Raphson dans $\mathbb{R}^n$. [**2 points**]
   ii) Étant donné $a, b, c \in \mathbb{R}$ fixes, écrire une méthode de Newton-Raphson pour le système [**1 point**] :

$$\begin{cases} r \sin\theta \cos\varphi = a \\ r \sin\theta \sin\varphi = b \\ r \cos\theta = c \end{cases}$$

iii) Discuter la convergence de l'algorithme en fonction des valeurs $a, b, c \in \mathbb{R}$. **[1 point]**

4. (Décomposition en valeurs singulières) **[5 points]**
Étant donnée une matrice $A \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$:
   i) Définir la notion de "valeurs singulières" de A. **[0.5 points]**
   ii) Énoncer et demontrer le théorème de la décomposition en valeurs singulières. **[2 points]**

$$A = V \Sigma U^*$$

   iii) Démontrer que les colonnes de la matrice U sont les vecteurs propres de A^*A et les colonnes de la matrice V sont les vecteurs propres de AA^*. **[2 points]**
   iv) Pourquoi est-ce qu'il n'y a pas une décomposition en valeurs singulières associée à A^*A et une autre à AA^* ? **[0.5 points]**