Université de Bourgogne L3 Analyse Fonctionnelle Année académique 2020–2021

Maths

EXAMEN 20 MAI 2021

Les documents et les calculatrices ne sont pas autorisés.

Exercice 1 (Espaces de Hilbert - 14 points).

1. Soit $(X, \langle\cdot,\cdot\rangle_X)$, $(Y, \langle\cdot,\cdot\rangle_Y)$ deux espaces préhilbertiens sur $\mathbb{R}$. On suppose qu'il existe une isométrie linéaire et surjective $L : X \to Y$. *Rappel : le caractére isométrique signifie* $\|L(x)\|_Y = \|x\|_X$ *pour tout* $x \in X$.
   (a) Montrer que L est bijective, et que
   $$\forall (x_1, x_2) \in X \times X, \langle L(x_1), L(x_2)\rangle_Y = \langle x_1, x_2\rangle_X.$$
   (b) Montrer que si X est un espace de Hilbert alors Y est un espace de Hilbert aussi.
   (c) On suppose que X est un espace de Hilbert et $\{e_n, n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de X. Montrer que la famille $\{L(e_n), n \in \mathbb{Z}\}$ est une base hilbertienne de Y.
2. On considère l'espace de Hilbert $\ell^2(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\mathbb{N}} u_n^2 < \infty\}$ muni du produit scalaire usuel $\langle u, v\rangle_{\ell^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n v_n$. On note $\|\cdot\|_{\ell^2}$ la norme associée à ce produit scalaire. Ensuite, on définit
   $$h^1(\mathbb{N}) = \{u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \sum_{n\in\mathbb{N}} n^2 u_n^2 < \infty\}$$
   et, pour tout $u, v \in h^1(\mathbb{N})$, on pose
   $$\langle u, v\rangle_{h^1} = \sum_{n=0}^{+\infty} (1 + n^2) u_n v_n.$$
   (a) Pour quelles valuers de $\alpha \in \mathbb{R}$ la suite $\left(\frac{1}{(n+1)^\alpha}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est-elle dans $\ell^2(\mathbb{N})$? Pour quelle valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ est-elle dans $h^1(\mathbb{N})$?
   (b) Montrer que l'application $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h^1} : h^1 \times h^1 \to \mathbb{R}$ est bien définie et donne un produit scalaire sur h^1.
   (c) Montrer qu'il existe une isométrie linéaire surjective $L : \ell^2(\mathbb{N}) \to h^1(\mathbb{N})$. En déduire que $(h^1, \langle\cdot,\cdot\rangle_{h^1})$ est un espace de Hilbert.
   (d) La norme associée au produit scalaire $\langle\cdot,\cdot\rangle_{h^1}$ est-elle équivalente à la norme $\|\cdot\|_{\ell^2}$ dans h^1 ?
   (e) Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on pose $e^{(k)} = (\delta_{kn})_{n\in\mathbb{N}}$ la suite qui vaut 1 au k-ième terme et 0 sinon. Montrer que $\{e^{(k)}, k \in \mathbb{N}\}$ est une base hilbertienne de $\ell^2(\mathbb{N})$. En déduire que $h^1(\mathbb{N})$ est dense dans $\ell^2(\mathbb{N})$.

Exercice 2 (Transformée de Fourier - 6 points). Pour $a \in \mathbb{R}_+^*$, on pose $f_a = \chi_{[-a,a]}$ avec χ_A la fonction caractéristique de l'ensemble A. *Rappel : pour toute* $f \in L^1(\mathbb{R})$, *on note*
$$\hat{f}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-itx}\, d\lambda(x)$$
la transformée de Fourier de f. *Ici* λ *est la mesure de Lebesgue sur* $\mathbb{R}$.

1. Calculer $\hat{f}_a$.
2. Montrer que la fonction $h_a(x) = (f_a \star f_a)(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f_a(x-y) f_a(y)\, d\lambda(y)$ est bien définie et continue pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. Calculer $\hat{h}_a$.
4. En déduire la valeur de
$$\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin t}{t}\right)^2 dt.$$