Licence de Mathématiques (2020-2021)

Intitulé de l'enseignement : Algèbre linéaire et bilinéaire (L3).
Date : mardi 05 janvier 2021, 15h30-18h30

Examen terminal (1ère session)

L'usage de tout appareil électronique est interdit. Les documents ne sont pas non plus autorisés. La rédaction et la clarté des arguments seront prises en compte dans la notation. Le barème, sur 40 points, est donné à titre indicatif et pourra être modifié lors de la correction des copies.

Questions de cours (10 pts). Soit $\mathbb{K}$ un corps (par exemple $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$), et soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie n.

(1) Soit $q\colon E \to \mathbb{K}$ une forme quadratique, de forme polaire ϕ. Démontrer que E admet une base ϕ-orthogonale. Quelle est l'interprétation matricielle de ce résultat ?

(2) Rappeler ce que signifie *être équivalentes* pour deux formes quadratiques q_1 et q_2 sur E, puis rappeler le résultat de classification des formes quadratiques (sans le démontrer) lorsque $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Donner un exemple de deux formes quadratiques non équivalentes lorsque $E = \mathbb{C}^2$.

(3) Justifier, en utilisant un résultat du cours que l'on précisera, pourquoi les deux formes quadratiques sur $\mathbb{Q}^2$ définies par

$$q_1 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x,y) \mapsto x^2 + y^2 \quad \text{et} \quad q_2 : \mathbb{Q}^2 \to \mathbb{Q},\ (x,y) \mapsto x^2 + 3y^2$$

ne sont pas équivalentes.

(4) Énoncer puis démontrer l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour un produit scalaire hermitien sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel E (on ne traitera pas le cas d'égalité).

(5) Énoncer (sans les justifier) les quatre caractérisations vues en cours d'un *endomorphisme unitaire* $u \in \mathcal{L}(E)$, avec $(E, \langle -,- \rangle)$ un espace hermitien.

Exercice 1 (9 pts). Soit $E = \mathbb{K}^4$. On considère l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ dont la matrice dans la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ de E est donnée par

$$M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(1) Calculer le polynôme caractéristique et le polynôme minimal de u.
(2) Donner une base de chaque espace propre de u.
(3) En déduire la forme réduite de Jordan de u. On notera J cette matrice.
(4) Calculer une base de Jordan pour u. On notera $\mathcal{C}$ cette base.
(5) Soit $P := \mathrm{Pass}(\mathcal{B} \to \mathcal{C})$. Calculer P^{-1}, puis vérifier que $PJP^{-1} = M$.
(6) En déduire la décomposition de Dunford de M.
(7) Déterminer les invariants de similitude et la forme réduite de Frobenius de u.
(8) Donner un exemple d'un endomorphisme $v \in \mathcal{L}(E)$ qui n'est pas semblable à u mais ayant le même polynôme caractéristique et le même polynôme minimal que u.

Exercice 2 (4 pts). Soient $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$. On considère le système différentiel défini par

$$(S)\left\{\begin{array}{llllll} x_1'(t) & = x_1(t) & & & & \\ x_2'(t) & = & x_2(t) & + & x_3(t) & \\ x_3'(t) & = & & & x_3(t) & \\ x_4'(t) & = x_1(t) & & & & + \quad x_4(t) \end{array}\right.$$

En utilisant les résultats trouvés à l'exercice précédent, résoudre le système différentiel (S) et donner l'unique solution telle que

$$x_1(0) = x_2(0) = x_3(0) = x_4(0) = 1.$$

Exercice 3 (10 pts). Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni de la base canonique $\mathcal{B} = \{e_1, e_2, e_3\}$.
On considère les deux formes quadratiques sur E telles que :

$$\forall v = xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E, \quad \left\{\begin{array}{l} q_a(v) := 2x^2 + y^2 + 5z^2 + 4xz + 2yz \quad ; \text{ et} \\ q_b(v) := -9x^2 + y^2 + z^2 + 2yz. \end{array}\right.$$

(1) Écrire les formes polaires ϕ_a et ϕ_b des formes quadratiques q_a et q_b respectivement, puis écrire les matrices de ϕ_a et ϕ_b dans la base $\mathcal{B}$.
(2) Réduire q_a et q_b en une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires linéairement indépendantes sur E. En déduire les signatures de q_a et q_b.
(3) Justifier que ϕ_a est un produit scalaire sur E, puis vérifier que la famille

$$\mathcal{C} = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}, \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1\\1\\-1\end{bmatrix} \right\}$$

est une base de E orthonormale pour le produit scalaire ϕ_a, autrement dit que $A := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi_a) = I_3$.
(4) Écrire la matrice $B := \mathrm{Mat}_{\mathcal{C}}(\phi_b)$ et calculer son polynôme caractéristique.
(5) En déduire les valeurs propres de la matrice B, puis déterminer une base de chacun des espaces propres de B. (On prendra garde que l'on travaille maintenant dans la base $\mathcal{C}$.)
(6) En déduire une base $\mathcal{D}$ de E qui est à la fois ϕ_1-orthonormale et ϕ_2-orthogonale.
(7) Expliciter une matrice $P \in \mathrm{GL}_3(\mathbb{R})$ et une matrice diagonale $\Delta \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ telles que

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_1) = {}^tPP \quad \text{et} \quad \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\phi_2) = {}^tP\Delta P.$$

Exercice 4 (7 pts). Soit $E_n = \mathbb{C}[x]_{\leq n}$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel de polynômes de degré $\leq n$, et soit

$$\varphi \colon E_n \times E_n \to \mathbb{C}, \; (P, Q) \mapsto \int_{-1}^{1} \overline{P(x)}Q(-x)dx.$$

(1) Montrer que φ est une forme sesquilinéaire à symétrie hermitienne. Est-elle dégénérée ?
(2) On fixe $n = 2$, et soit $\mathcal{B}$ la base $\{1, x, x^2\}$ de E_2. Écrire la matrice $M := \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi)$.
(3) On fixe $n = 2$, et soit $F = \mathrm{Vect}\{1 + ix\}$ le sous-espace vectoriel de E_2 engendré par $1 + ix$. Déterminer $F^\perp$, l'orthogonal de F dans E_2 par rapport à φ.
(4) On fixe $n = 3$, et soit $G = \mathrm{Vect}\{1\}$ le sous-espace vectoriel de E_3 engendré par 1. Déterminer $G^\perp$, l'orthogonal de G dans E_3 par rapport à φ.
(5) Trouver un élément non-nul $P \in E_2$ tel que $\varphi(P, P) = 0$.
(6) Trouver une base $\mathcal{B}'$ de E_2 qui est orthogonale par rapport à φ.