Université de Bourgogne
Licence 3 Mathématiques

Mercredi 19 mai 2021
8h-11h

Examen d'Algèbre 2 Session 1 -

Exercice 1 (Questions de cours) :

1. Soit G un groupe fini qui agit sur un ensemble X.
   (a) Soit x un élément de X. Rappeler les définitions du stabilisateur G_x et de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (b) Montrer que l'indice $[G : G_x]$ du stabilisateur G_x est égal au nombre d'éléments de l'orbite $\mathcal{O}(x)$.
   (c) Soient x et y deux éléments de X tels que $\mathcal{O}(x) = \mathcal{O}(y)$, Montrer que les stabilisateurs G_x et G_y sont conjugués.
2. Soit G un groupe fini d'ordre n et p un diviseur premier de n. Énoncer et démontrer le théorème de Cauchy.
3. Soient m, p, r trois entiers naturels non nuls tels que p est premier et $m \wedge p = 1$. Soit G un groupe fini d'ordre mp^r. Énoncer sans démonstration les théorèmes de Sylow.

Exercice 2 (Questions indépendantes) :

1. Soit G un groupe. Un sous-groupe H de G est dit caractéristique s'il est stable par tout automorphisme de G. Démontrer que le sous-groupe dérivé $D(G)$ de G est caractéristique.
2. Soit G un groupe d'ordre 35 qui agit sur un ensemble X de cardinal 19.
   (a) Préciser les cardinaux possibles des orbites de cette action.
   (b) On suppose qu'aucune des orbites n'est réduite à un seul élément.
   Combien y-t-il d'orbites ? .
   Combien d'éléments contiennent-elles ?
3. Le polynôme $P = 7X^9 - 25X^4 + 15X^3 + 35X - 35$ est-il irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$? Justifier.

Exercice 3 :

1. Soient G un groupe, H et K deux sous-groupes normaux de G.
   (a) Montrer que HK est un sous-groupe de G et qu'il est normal dans G.
   (b) On suppose que $H \cap K = \{1_G\}$. Montrer que $\forall h \in H, \forall k \in K,\ hk = kh$. En déduire que $HK \simeq H \times K$.
2. On suppose que G est un groupe d'ordre 2021.
   (a) Démontrer que G admet un unique sous-groupe H d'ordre 43 et que celui-ci est est normal dans G.
   (b) Démontrer de même que G possède un unique sous-groupe normal K d'ordre 47.
   (c) Déduire de ce qui précède que tout groupe d'ordre 2021 est cyclique.

Exercice 4 : Soit p un nombre premier et G l'ensemble des matrices triangulaires supérieures **à coefficients dans le corps** $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de la forme

$$G = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & k & \ell \\ 0 & 1 & m \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ tel que } k, \ell, m \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \right\}.$$

1. Montrer que G est un sous-groupe non commutatif du groupe des matrices inversibles à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.
2. Montrer que le groupe G est d'ordre p^3.
3. (a) Justifier que le centre $Z(G)$ du groupe G n'est pas trivial.
   (b) Déterminer ce centre et préciser son ordre.

Exercice 5 : Soit $d \in \mathbb{N}$ un nombre impair sans facteur carré avec $d \geq 5$. Soit

$$\mathbb{A} = \mathbb{Z}[i\sqrt{d}] = \{a + bi\sqrt{d} \in \mathbb{C} | a, b \in \mathbb{Z}\}.$$

1. Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est un anneau intègre
2. Soit a, b dans $\mathbb{Z}$, on note $N(a + bi\sqrt{d}) = a^2 + db^2$. Montrer que $N(z_1 z_2) = N(z_1)N(z_2)$.
3. Déterminer les unités de l'anneau $\mathbb{A}$.
4. Rappeler la définition d'un élément irréductible d'un anneau et montrer que les éléments 2, $1 + i\sqrt{d}$ et $1 - i\sqrt{d}$ sont irréductibles dans $\mathbb{A}$.
5. Montrer que dans un anneau principal, si trois éléments a, b, c vérifient : a est irréductible et $a|bc$ alors on a $a|b$ ou $a|c$.
6. En utilisant ce qui précède et en calculant $(1 + i\sqrt{d})(1 - i\sqrt{d})$ montrer que 2 n'est pas premier dans l'anneau et que $\mathbb{A}$ n'est pas principal.