L3 Maths

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2020-2021
Janvier 2021

Algèbre 1
Contrôle terminal

Question de cours.

(1) Donner la définition de *idéal bilatère* d'un anneau A.

(2) Soir $(I_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ une collection non vide d'idéaux bilatères d'un anneau A. Montrer que $\cap_{\lambda\in\Lambda} I_\lambda$ est un idéal bilatère de A. (Attention : nous ne supposons pas connu que l'intersection de sous-groupes est un sous-groupe).

(3) Donner la définition d'idéal bilatère *engendré par* une partie S de A, noté (S).

(4) On suppose que A est un anneau commutatif et $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ est une partie finie de A. Montrer que

$$(S) = \{a_1x_1 + \cdots + a_nx_n \mid a_1, \dots, a_n \in A\}\,.$$

Exercice 1. Soit n un entier plus grand ou égal à 2. Soient $\sigma, \sigma' \in \mathfrak{S}_n$. On dit que σ' est *conjugué* à σ et on note $\sigma' \sim_c \sigma$ s'il existe $\tau \in \mathfrak{S}_n$ tel que $\sigma' = \tau \circ \sigma \circ \tau^{-1}$.

(1) Montrer que la relation $\sim_c$ est une relation d'équivalence.

(2) Soient $\tau \in \mathfrak{S}_n$ et $m \in \{2, \dots, n\}$. Montrer que

$$\tau \circ (1, 2, \dots, m) \circ \tau^{-1} = (\tau(1), \tau(2), \dots, \tau(m))\,.$$

(3) En déduire qu'une permutation est conjuguée à un cycle de longueur m si et seulement si elle est elle-même un cycle de longueur m.

Exercice 2. Dans cet exercice d désigne un entier plus grand ou égal à 2 et on pose

$$\mathbb{Z}[i\sqrt{d}] = \{a + bi\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Z}\} \text{ et } \mathbb{Q}[i\sqrt{d}] = \{a + bi\sqrt{d} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}\,.$$

(1) Montrer que $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$.

(2) On admettra que l'on démontre de la même façon que $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ est un sous-anneau de $\mathbb{C}$. Montrer que $\mathbb{Q}[i\sqrt{d}]$ est un corps, et que ce corps est un corps de fractions de $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$.

(3) On considère l'application $N : \mathbb{Z}[i\sqrt{d}] \to \mathbb{N}$ définie par $N(a+bi\sqrt{d}) = |a+bi\sqrt{d}|^2 = a^2+b^2d$. Montrer qu'un élément α de $\mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$ est inversible si et seulement si $N(\alpha) = 1$. Déterminer $\mathcal{U}(\mathbb{Z}[i\sqrt{d}])$. (<u>Indication :</u> Montrer et utiliser le fait que $N(\alpha\alpha') = N(\alpha)\,N(\alpha')$ pour tous $\alpha, \alpha' \in \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$.)

(4) Soit $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{d}]$. Montrer que, si $N(\alpha)$ est un nombre premier, alors α est irréductible.

(5) Montrer qu'il n'existe pas de nombre $\alpha \in \mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$ tel que $N(\alpha) \in \{2, 3\}$. En déduire que $(1 + i\sqrt{5})$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$.

(6) Montrer que $(1 + i\sqrt{5})$ n'est pas premier dans $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$. (<u>Indication :</u> Utiliser l'égalité $(1 + i\sqrt{5}) \times (1 - i\sqrt{5}) = 2 \times 3$.)

(7) Que peut-on en conclure au sujet de l'anneau $\mathbb{Z}[i\sqrt{5}]$?