L1 Math 1B

Université de Bourgogne
UFR Sciences et Techniques

Année 2019-2020
Janvier 2020

Logique et Algèbre 1
Examen

Question de cours 1.

(1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Donner la définition de *racine n-ième* d'un nombre complexe.

(2) Soient n un entier ≥ 2 et $z = \rho e^{i\theta}$ un nombre complexe non nul écrit sous forme exponentielle. Montrer que les racines n-ièmes de z sont $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_{n-1}$, où

$$\omega_k = \rho^{1/n} e^{i\frac{\theta+2k\pi}{n}}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1.$$

(Attention : nous ne demandons pas de montrer que $\omega_k \neq \omega_\ell$ pour $k, \ell \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, $k \neq \ell$.)

Question de cours 2.

(1) Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Donner la définition de *plus grand diviseur commun* de a et b, noté $\operatorname{pgcd}(a, b)$.

(2) Soient $a, b \in \mathbb{Z}^*$. Montrer que, si a divise b, alors $\operatorname{pgcd}(a, b) = |a|$.

(3) Soient $a, b \in \mathbb{N}^*$ et $b = qa + r$ la division de a par b. Montrer que $\operatorname{pgcd}(a, b) = \operatorname{pgcd}(b, r)$.

Exercice 1. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation suivante :

$$(E) \quad Z^2 - (5+2i)Z + 19 - 7i = 0.$$

(On pourra utiliser l'égalité $73^2 = 5329$.)

Exercice 2.

(1) Déterminer le module et un argument de $\omega = \frac{1-i\sqrt{3}}{1-i}$.

(2) Déterminer l'ensemble des $z \in \mathbb{C}$ tels que $z^3 = \omega^3$. On donnera ces nombres écrits sous forme exponentielle (c'est-à-dire sous la forme $z = \rho e^{i\theta}$) et sous forme cartésienne (c'est-à-dire sous la forme $z = a + ib$).

Exercice 3. Résoudre l'équation entière suivante :

$$(E) \quad 39X + 108Y = 15.$$

Exercice 4. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, 7 divise $2^{(4^n)} + 5$.