L3 PFA + Méca

UNIVERSITÉ DE BOURGOGNE
EXAMEN DE MÉTHODES MATHÉMATIQUES - JANVIER 2020
Durée : 2h. Aucun document n'est autorisé.

Exercice I. On considère l'équation différentielle d'ordre 1 de la fonction inconnue $x(t)$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x,t) = -\frac{P(t)}{Q(x)}, \tag{1}$$

où $P(t)$ est une fonction de t et $Q(x)$ est une fonction de x, avec la condition initiale $x_0 = x(0)$.
a) Montrer que l'équation est à variable séparable, et donner la méthode de résolution.
b) Donner la solution dans le cas $f(x,t) = -iax$, où a est une constante réelle.
c) Donner la solution dans le cas $f(x,t) = axt$, où a est une constante réelle.

Exercice II. On considère la matrice complexe

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 2i & 0 \\ -2i & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2}$$

1) Vérifier que la matrice est hermitienne.
Quelles sont alors les propriétés des valeurs et vecteurs propres ?
2) Calculer les valeurs propres a_i et les vecteurs propres (normés) correspondants $|u_i\rangle$ de la matrice A en précisant le degré de dégénérescence pour chaque valeur propre.
3) Vérifier le théorème de décomposition spectrale :

$$A = \sum_{i=1}^{3} a_i |u_i\rangle\langle u_i|. \tag{3}$$

4) Calculer alors e^{-iAt} (avec t réel) en utilisant le théorème spectral :

$$f(A) = \sum_{i=1}^{3} f(a_i)|u_i\rangle\langle u_i|, \tag{4}$$

où $f(.)$ est une fonction.
5) En déduire la solution de l'équation différentielle $i\frac{d|X\rangle}{dt} = A|X\rangle$ où $|X(t)\rangle = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $|X(0)\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Exercice III. Dans cet exercice, on notera la transformée de Fourier $\hat{f}(\nu) \equiv \mathcal{F}_\nu[f(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-2i\pi\nu x}dx$.
Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{-\gamma|x|}$ pour $\gamma > 0$ réel.

1. Calculer la transformée de Fourier de $f(x)$. La tracer.
2. En déduire la transformée de Fourier de $g_a(x) = \frac{a}{\pi(a^2+x^2)}$ pour a réel > 0 en utilisant la propriété de dualité :

$$\mathcal{F}_\nu[\hat{f}(x)] = f(-\nu). \tag{5}$$

Exercice IV. Dans cet exercice, on résout à l'aide de la transformée de Fourier l'équation de transport

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \frac{1}{c}\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{6}$$

avec la condition initiale $u(x,0) = f(x)$. On suppose un milieu infiniment étendu selon x.

a) Appliquer la transformée de Fourier spatiale de cette équation et de la condition initiale.
On notera $\hat{u}(\nu,t) \equiv \mathcal{F}_\nu[u(x,t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} u(x,t)e^{-2i\pi\nu x}dx$.

b) Résoudre l'équation différentielle résultante.

c) En déduire la solution par transformée de Fourier inverse. Interpréter cette solution.