Calcul intégral

Université de Bourgogne
Département de Mathématiques
UFR Sciences et Techniques

L3 Mathématiques
UE-Intégration.

Examen du 6 janvier 2020
durée : trois heures

Notations. On désigne par λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et λ_2 la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$.

Vous rédigerez les exercices 1, 2 et 3 sur une feuille, les exercices 4 et 5 sur une autre.

EXERCICE 1. Soient $(E,\mathscr{E})$ et $(F,\mathscr{F})$ deux espaces mesurables et $f:(E,\mathscr{E})\to(F,\mathscr{F})$ une application mesurable. On munit $(E,\mathscr{E})$ d'une mesure μ. Pour tout $B\in\mathscr{F}$ on pose $\nu(B)=\mu(f^{-1}(B))$.

1. Montrer que si une application $g:(F,\mathscr{F})\to\mathbb{R}$ est mesurable, alors $g\circ f:(E,\mathscr{E})\to\mathbb{R}$ est mesurable.
2. Montrer que ν est bien définie (c'est à dire que la formule définissant ν a bien un sens).
3. Montrer que ν est une mesure sur $(F,\mathscr{F})$.
4. Montrer que pour tout $B\in\mathscr{F}$ on a : $\displaystyle\int_E \mathbb{1}_B\circ f\,\mathrm{d}\mu=\int_F \mathbb{1}_B\,\mathrm{d}\nu$.

***

EXERCICE 2. Montrer, en énonçant les théorèmes du cours utilisés et en justifiant vos calculs que pour tous réels strictement positifs α et β on a

$$\int_{]0;+\infty[}\frac{x\,\mathrm{e}^{-\alpha x}}{1-\mathrm{e}^{-\beta x}}\,\mathrm{d}\lambda(x)=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(\alpha+\beta n)^2}<+\infty.$$

***

EXERCICE 3. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite de fonctions définies sur $\mathbb{R}_+^*$ par : $f_n(x)=\dfrac{n}{(x+1)x\sqrt{x}}\sin\left(\dfrac{x}{n}\right)$.

1. Vérifier que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge simplement vers une fonction f que l'on précisera.
2. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ la fonction f_n est intégrable sur $]0;+\infty[$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ.
3. En déduire la limite $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}_+^*}f_n(x)\,\mathrm{d}\lambda(x)$ en utilisant un théorème du cours dont on rappellera l'énoncé, et pour lequel on vérifiera que les hypothèses sont bien satisfaites.

Rappel : vous rédigerez les exercices 1, 2 et 3 sur une feuille, les exercices 4 et 5 sur une autre.

EXERCICE 4. On considère les fonctions f et g définies sur $[0;1]\times[0;1]\setminus\{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ par :

$$f(x,y)=\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}\qquad g(x,y)=\frac{x-y^2}{x^2+y^2}.$$

Étudier l'intégrabilité de chacune de ces fonctions sur $[0;1]\times[0;1]$ par rapport à la mesure de Lebesgue λ_2, et en cas d'intégrabilité, calculer les intégrales (on pourra utiliser les coordonnées polaires).

***

EXERCICE 5. Pour $t\in\mathbb{R}$, on considère la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ définie par $f(t)=\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+^*}\frac{\mathrm{e}^{-x}}{\sqrt{x}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}\lambda(x)$.

On rappelle le résultat suivant du cours : $\displaystyle\int_{\mathbb{R}}\mathrm{e}^{-u^2}\,\mathrm{d}u=\sqrt{\pi}$.

1. Montrer que f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Calculer $f(0)$ (on pourra effectuer un changement de variable).
3. Montrer que f est dérivable, calculer la dérivée f' et au moyen d'une intégration par parties, montrer que f satisfait l'équation différentielle linéaire
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad 2(t+\mathrm{i})f'(t)+f(t)=0.$$
4. On pose $g(t)=\left(f(t)\right)^2$. Montrer que g satisfait l'équation différentielle
$$\forall t\in\mathbb{R}\qquad (t+\mathrm{i})g'(t)+g(t)=0.$$
5. En déduire une expression de g puis de f (utiliser la question 2).