L3 maths

Université de Bourgogne Année 2018-2019

Topologie des espaces métriques 9 janvier

Contrôle terminal – 3h

Aucun document n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, (E,d) et (F,d') sont deux espaces métriques. Les ensembles $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}^2$, $\mathbb{C}$ et $\mathbb{C}^2$ seront munis de leur distance usuelle.

Exercice 1.
Soit $f\colon E \to F$ une application continue.
1) Montrer que si E est compact alors f est uniformément continue.
2) Existe-t-il une application $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit uniformément continue ?
3) Donner un exemple d'application continue $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue.
(Pour ces deux dernières questions, justifiez bien vos réponses)

Exercice 2.
On note $\Delta_{\mathbb{R}} := \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x = y\}$ et $\Delta_{\mathbb{C}} := \{(x,y) \in \mathbb{C}^2 \,|\, x = y\}$. Parmi les ensembles ci-dessous, lesquels sont connexes et lesquels ne sont pas connexes. Dans tous les cas, justifiez vos réponses.
1) $\mathbb{R} \setminus \{0\}$, **2)** $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, **3)** $\mathbb{R}^2 \setminus \Delta_{\mathbb{R}}$, **4)** $\mathbb{C}^2 \setminus \Delta_{\mathbb{C}}$, **5)** $\Delta_{\mathbb{R}}$.

Exercice 3.
On suppose qu'il existe deux éléments x_0, x_1 de E tels que $x_0 \neq x_1$.
1) Expliquer comment construire une application continue $f\colon E \to \mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 1$.
2) En déduire que si l'on rajoute l'hypothèse que E est connexe alors E ne peut pas être dénombrable.

Exercice 4.
Soit $f\colon E \to F$ une application.

1) Montrer que les deux caractérisations de la continuité ci-dessous sont équivalentes.

i) $\forall x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall y \in E$, $d(x,y) \leq \eta$ implique $d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

ii) Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

2) Soit g une deuxième application entre E et F. Soit $A \subset E$ une partie dense de E. Montrer que si f et g sont continues et que $f_{|A} = g_{|A}$ alors $f = g$.

Exercice 5.
Soit A et B deux parties denses de $\mathbb{R}$. Peut-on avoir $A \cap B = \varnothing$? Si oui, donner un exemple. Si cela n'est pas possible, donner une preuve de cette impossibilité.

Exercice 6.
1) Soit $(x_n)_{n\geq 0}$ une suite de E qui converge vers $x \in E$. Montrer que $X := \{x_n \,|\, n \geq 0\} \cup \{x\}$ est un compact de E.
Soit $f\colon E \to F$ une application continue. On dit que f est *fermé* si l'image par f d'un fermé de E est un fermé de F. On dit que f est *propre* si l'image inverse par f d'un compact de F est un compact de E.
2) Montrer que si E est compact alors f est propre.
3) Montrer que si f est propre alors f est fermé. *Indication :* si V est un fermé de E et $(y_n)_{n\geq 0}$ est une suite de $f(V)$ qui converge vers $y \in F$ alors on pourra considérer l'ensemble $X := \{y_n \,|\, n \geq 0\} \cup \{y\}$.