L3 mathématiques

Université de Bourgogne Année 2018-2019

Topologie des espaces métriques 25 juin

Rattrapage – 3h

Aucun document n'est autorisé.

Justifier vos affirmations. Une attention particulière sera portée à la rédaction.

Dans tout le sujet, (E, d) et (F, d') sont deux espaces métriques. Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ seront munis de leur distance usuelle.

Exercice 1.
Soit $f\colon E \to F$ une application continue.
1) Montrer que si E est compact alors f est uniformément continue.
2) Existe-t-il une application $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui soit uniformément continue ?
3) Donner un exemple d'application continue $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui n'est pas uniformément continue.
(Pour ces deux dernières questions, justifiez bien vos réponses)

Exercice 2.
Soit $f\colon E \to F$ une application continue et soit $A \subset E$. Les affirmations suivantes sont-elles forcément exactes ? En donner une preuve pour celles qui le sont et donner un contre-exemple pour les autres.
1) Si A est un ouvert de E alors $f(A)$ est un ouvert de F.
2) Si A est un fermé de E alors $f(A)$ est un fermé de F.
3) Si A est un connexe de E alors $f(A)$ est un connexe de F.
4) Si A est un compact de E alors $f(A)$ est un compact de F.
5) Si A est un complet de E alors $f(A)$ est un complet de F.

Exercice 3.
Soit A et B deux parties d'intérieur vide de E.
a) Donner un exemple où $A \cup B$ n'est pas d'intérieur vide.
b) Si on suppose que A et B sont fermés dans E, l'ensemble $A \cup B$ est-il forcément d'intérieur vide ?
c) Si on suppose que A et B sont ouverts dans E, l'ensemble $A \cup B$ est-il forcément d'intérieur vide ?

Exercice 4.
On suppose qu'il existe deux éléments x_0, x_1 de E tels que $x_0 \neq x_1$.
1) Expliquer comment construire une application continue $f\colon E \to \mathbb{R}$ telle que $f(x_0) = 0$ et $f(x_1) = 1$.
2) En déduire que si l'on rajoute l'hypothèse que E est connexe alors E ne peut pas être dénombrable.

Exercice 5.
Soit $f\colon E \to F$ une application.
Montrer que les deux caractérisations de la continuité ci-dessous sont équivalentes.

i) $\forall x \in E$, $\forall \epsilon > 0$, $\exists \eta > 0$ tel que $\forall y \in E$, $d(x, y) \leq \eta$ implique $d'(f(x), f(y)) \leq \epsilon$.

ii) Pour tout ouvert V de F, $f^{-1}(V)$ est un ouvert de E.

Exercice 6.
Rappelons que $\mathbb{S}^1 = \{z \in \mathbb{C} \colon |z| = 1\}$ est le cercle unité de $\mathbb{C}$.
1) Montrer que $\mathbb{S}^1$ est connexe.
2) En déduire que si $f\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}$ est continue alors il existe $z \in \mathbb{S}^1$ tel que $f(z) = f(-z)$.
3) En déduire que $\mathbb{S}^1$ n'est pas homéomorphe à une partie de $\mathbb{R}$.