Licence de Mathématiques
Intitulé de l'enseignement : Théorie des Probabilités
Année : L3
Date : 22 mai 2019

Examen terminal

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1 : Soient U et V des v.a. indépendantes de lois de densités respectives

$$f(u) = 2u\mathbb{1}_{0<u<1} \quad \text{et} \quad g(v) = \mathbb{1}_{0<v<1}.$$

▷ **1)** Déterminer la fonction de répartition de $W = \max(U, V)$.

▷ **2)** En déduire la densité de W et la tracer.

▷ **3)** Calculer la fonction caractéristique de V.

Exercice 2 : Soient $a, b, \lambda > 0$ et T_1, T_2 des v.a. indépendantes respectivement de lois gamma $\gamma(a, \lambda)$ et $\gamma(b, \lambda)$, i.e. de densités respectives

$$f_1(t) = \frac{\lambda^a}{\Gamma(a)} t^{a-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t>0} \quad \text{et} \quad f_2(t) = \frac{\lambda^b}{\Gamma(b)} t^{b-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t>0} \quad \text{où} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt.$$

On rappelle que Γ est bien définie sur $]0, \infty[$ et que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

▷ **1)** Montrer que la densité de $S = T_1 + T_2$ est proportionnelle à $h(t) = t^{a+b-1} e^{-\lambda t} \mathbb{1}_{t>0}$.

▷ **2)** En déduire que $\int_0^1 x^{a-1}(1 - x)^{b-1} dx = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

▷ **3)** On note $\beta(a, b)$ (loi bêta) la distribution sur $[0, 1]$ de densité $g(x) = \frac{\Gamma(a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} x^{a-1}(1-x)^{b-1} \mathbb{1}_{]0,1[}(x)$.

(a) Soit X une v.a. de loi $\beta(a, b)$. Montrer que $\mathbb{E}[X] = \frac{a}{a+b}$.

(b) Soient $p > 0$ et U une v.a. de loi uniforme sur $[0, 1]$. Montrer que U^p est de loi $\beta(1/p, 1)$.

(c) Montrer que $\frac{T_1}{T_1+T_2}$ et $T_1 + T_2$ sont deux v.a. indépendantes de lois $\beta(a, b)$ et $\gamma(a + b, \lambda)$.

Exercice 3 : Soient $n, N \geq 1$. On dispose de n urnes numérotés de 1 à n, l'urne k contenant k boules rouges et $n - k$ boules vertes. On choisit aléatoirement et uniformément le numéro de l'urne puis, indépendamment, on tire aléatoirement et uniformément avec remise dans cette urne N boules. On note R le nombre de boules rouges obtenues. On introduit pour modéliser cette expérience une v.a. U uniforme sur $\{1, \cdots, n\}$ et $X_1, \cdots, X_n$ des v.a. indépendantes de U où X_k représente le nombre de boules rouge obtenues par cette expérience sachant que l'on tire dans l'urne k. On a donc $R = X_U$.

▷ **1)** Qu'elle est la loi de X_k ?

▷ **2)** Calculer la loi de R en fonction de n, N.

▷ **3)** Déterminer la limite de $\mathbb{P}(R = 0)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$.

▷ **4)** *(hors barème) Déterminer pour tout $p \in [|0, N|]$ la limite de $\mathbb{P}(R = p)$ lorsque $n \longrightarrow \infty$. On pourra utiliser la loi bêta de l'exercice 2.*

Exercice 4 : Soient (X, Y) un couple de v.a. de loi donnée par la densité

$$f(x, y) = \frac{\mathbb{1}_{0<y<x<1}}{x}.$$

▷ **1)** Montrer que X est de loi uniforme sur $[0, 1]$.

▷ **2)** Montrer que $Y = XV$ où V est une v.a. indépendante de X et de même loi.

▷ **3)** Soient $s, t \in \mathbb{R}$ et $Z = sX + tY$.

(a) Déterminer l'espérance et la variance de Z en justifiants que ces quantités sont bien définies. On rappelle que $\mathbb{E}[X] = 1/2$ et $\mathbb{V}(X) = 1/12$.

(b) Soient $(X_n, Y_n)_{n\geq 1}$ des couples de v.a. i.i.d. de même loi que (X, Y). Donner, en justifiant bien les théorèmes employés, les limites et les modes de convergence des suites

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(sX_k + tY_k) \quad \text{et} \quad \frac{\sum_{k=1}^{n}(sX_k + tY_k)}{\sqrt{n}} - \left(\frac{s}{2} + \frac{t}{4}\right)\sqrt{n}.$$

Exercice 5 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de v.a. indépendantes telle que X_n soit de loi de Bernoulli de paramètre $1/n$. On pose $Y_n = X_n X_{n+1}$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$, $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ et $Z_n = X_n + Y_n$.

▷ **1)** Donner la loi de Y_n.

▷ **2)** Déterminer la loi de Z_n, son espérance et sa variance.

▷ **3)** Tracer la fonction de répartition de Z_n.

▷ **4)** Calculer la fonction caractéristique de Z_n.

▷ **5)** Montrer que X_n et Z_n ne sont pas des v.a. indépendantes.

▷ **6)** Calculer les probabilités des événements $\{X_n = 1 \text{ "i.s."}\}$ et $\{Y_n = 1 \text{ "i.s."}\}$ où "i.s." signifie "pour une infinité d'entiers n".

▷ **7)** On rappelle que $H_n \underset{n\to\infty}{=} \ln(n) - \gamma + \mathrm{o}(1)$.

(a) Justifier que pour tout $\varepsilon > 0$ et $n \geq 2$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - \frac{H_n}{\ln(n)}\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{H_n - \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}}{\varepsilon^2 \ln(n)^2}.$$

(b) En déduire que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $N \geq 2$ tel que pour tout $n \geq N$,

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right| > \varepsilon\right) \leq \frac{4}{\varepsilon^2 \ln(n)}.$$

Que peut-on en déduire ?

▷ **8)** *(hors barème). Montrer que* $\sqrt{\ln(n)}\left(\frac{S_n}{\ln(n)} - 1\right)$ *converge en loi vers une gaussienne centrée réduite.*