Théorie des probabilités

Licence de Mathématiques

2018-2019

Intitulé de l'enseignement : Probabilités

Année : L3

Date : 20 Juin 2019

Examen 2ème session

La rédaction et la justification de vos réponses seront prises en compte dans la note.

Exercice 1 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0,1]$ et $T := \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$, le premier instant n pour lequel $X_n = 1$.

▷ 1) Calculer $\mathbb{P}(T = 1)$ et $\mathbb{P}(T = 2)$.

▷ 2) Montrer de manière générale que T suit une loi géométrique de paramètre p.

▷ 3) Calculer la fonction de répartition F de T.

▷ 4) Montrer que pour tout $n \geq m \geq 1$,

$$\mathbb{P}(T > n + m | T > m) = \mathbb{P}(T > n).$$

▷ 5) Interpréter la formule de la question précédente.

Exercice 2 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $X_1, \cdots, X_n$ des variables aléatoires indépendantes, respectivement de loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1), \cdots, \mathcal{P}(\lambda_n)$ où les paramètres $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ sont strictement positifs. Soit X une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ et φ_λ sa fonction caractéristique.

▷ 1) Montrer que $\mathbb{E}[X] = \lambda$ et $\mathbb{V}[X] = \lambda$.

▷ 2) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_\lambda(t) = e^{\lambda(e^{it}-1)}$.

▷ 3) En déduire que $X_1 + \cdots + X_n$ suit une loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n)$.

▷ 4) Soit S_n une variable aléatoire de loi de Poisson de paramètre n. Montrer qu'on a la convergence en loi suivante vers une loi normale centrée réduite :

$$\frac{S_n - n}{\sqrt{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0,1).$$

Exercice 3 : Soit un réel $\lambda > 0$ et un entier n tel que $n \geq \lambda$. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$, où X_n suit une loi géométrique de paramètre λ/n. On pose $T_n = X_n/n$. Montrer que (T_n) converge en loi vers une loi exponentielle de paramètre λ :

$$T_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{L}} \mathcal{E}(\lambda).$$

Exercice 4 : Soit n un entier naturel. On considère une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre 1 et Y une loi binomiale $\mathcal{B}(n, \frac{1}{2})$. On suppose que X et Y sont indépendantes. Montrer que $Z = \frac{X}{Y+1}$ est une variable à densité et déterminer sa densité.

Exercice 5 : Soit X une variable aléatoire telle que X et $2X$ admettent la même fonction de répartition. Déterminer F. Que peut-on dire de X ?

Exercice 6 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées, de loi de Bernoulli de paramètre p. Soit Y_n une variable aléatoire telle que $Y_n = 0$ si $X_n = X_{n+1}$ et $Y_n = 1$ si $X_n \neq X_{n+1}$. Posons $S_n = Y_1 + \ldots + Y_n$.

▷ **1)** Calculer la moyenne et la variance de S_n.

▷ **2)** Montrer que $\frac{S_n}{n}$ converge dans L^2 vers $2p(1-p)$.

▷ **3)** Etudier la convergence presque-sûre.

Exercice 7 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telles que pour tout $n \geq 1$, on ait

$$\mathbb{P}(X_n = \sqrt{n}) = \mathbb{P}(X_n = -\sqrt{n}) = \frac{1}{2}.$$

On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$.

▷ **1)** Montrer que $(S_n/n^{3/2})$ converge en probabilités vers 0.

▷ **2)** Montrer que (S_{n^2}/n^3) converge presque sûrement vers 0.

Exercice 8 : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes telle que

$$\mathbb{P}(X_n = -n) = \mathbb{P}(X_n = n) = \frac{1}{2n^2} \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}.$$

▷ **1)** La suite $(X_n)_{n\geq 1}$ satisfait-elle la loi forte des grands nombres ?

▷ **2)** Que dire du comportement asymptotique de (X_n) ?