

Examen de l'U.E. STATISTIQUE - mardi 21 mai 2019 14h-17h

Questions sur R (3 pts)

On exécute le code R suivant :

```
mu=10;sigma=2;n=8
q=qt(0.995,n-1)
ech=rnorm(n,mu,sigma)
m=mean(ech);s=sd(ech)
u=q*s/sqrt(n)
a=m-u;b=m+u
```

1. Donner la valeur de q .
2. Que contient ech ?
3. Que peut-on attendre pour les valeurs de a et b ? Justifier.

Exercice 1 : (11 pts)

Soit X une variable aléatoire suivant une loi de densité :

$$f_a(x) = \frac{x}{a} \exp\left(\frac{-x^2}{2a}\right) \mathbb{1}_{]0,+\infty[}(x)$$

où a est un paramètre réel positif.

Pour n entier positif ou nul, posons

$$I_n = \int_0^{+\infty} x^n e^{-x^2} dx \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^n}{a} \exp\left(\frac{-x^2}{2a}\right) dx$$

On rappelle que

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

1. Justifier que pour tout n positif ou nul, I_n est une intégrale convergente.
2. Donner le lien entre J_n et I_n .
3. Exprimer I_{n+2} en fonction de I_n .
4. Calculer I_0, I_1 .
5. En déduire I_2, I_3 .

6. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
7. Calculer $\mathbb{E}(X^2)$ et $\text{Var}(X)$.
8. Soit X_1, \dots, X_n un n-échantillon issu de X . Montrer que l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre a est :

$$T = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^n X_i^2$$

9. Montrer que T estime a sans biais.
10. On admet que $\text{Var}(X^2) = 4a^2$. Calculer l'erreur quadratique moyenne de T .
11. En utilisant le théorème central limite, déterminer la loi asymptotique de T .
12. Donner la loi asymptotique de $S = \ln(T)$.
13. En déduire un intervalle de confiance pour a .
14. On dispose d'un échantillon de taille 50 x_1, \dots, x_{50} issu d'une telle loi telle que :

$$\sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 415.3.$$

Calculer l'intervalle de confiance 0.95 pour a .

Exercice 2 : (3 pts)

Durant la campagne présidentielle de 2007, plusieurs sondages ont été effectués par l'institut de sondage CSA pour connaître les intentions de vote des électeurs. A la question :

Parmi les candidats suivants, pour lequel y aurait-il le plus de chances que vous votiez au premier tour de l'élection présidentielle ?

deux enquêtes réalisées le 28 février 2007 et le 7 mars 2007, portant sur 871 puis 917 personnes ont donné respectivement 29%, puis 26% pour le candidat qui a été élu président par la suite.

1. En utilisant un test statistique soigneusement rédigé, pouvez-vous dire avec un risque d'erreur de 5% qu'il y a eu une baisse des intentions de vote pour ce candidat entre ces deux sondages ?
2. Donner la p-value de ce test.

Exercice 3 : (3 pts)

Dans 320 familles de 5 enfants chacune, nous considérons la variable X comptant le nombre de filles (à valeurs entre 0 et 5). Voici les résultats :

X	0	1	2	3	4	5
Nombres de familles	18	56	110	88	40	8

1. Parmi les $5 \times 320 = 1600$ enfants, calculer la fréquence f de filles (sans approximation).
2. Tester au niveau 0.05 si l'on peut dire que X suit une loi binomiale en estimant la probabilité de naissance d'une fille par f .