

Examen de l'U.E. STATISTIQUE - jeudi 20 juin 2019 14h-17h *Statistique inférentielle*

Question de cours (2 pts)

1. Donner la définition de l'erreur quadratique moyenne  $EQM(T)$  d'un estimateur  $T$  d'un paramètre  $\theta$ .
2. Démontrer la formule du cours  $EQM(T) = B(T)^2 + V(T)$ .

**Exercice 1 : (5 pts)**

1. Rappeler l'expression du coefficient de corrélation linéaire  $r(x, y)$  entre deux séries statistiques quantitatives  $x = (x_1, \dots, x_n)$  et  $y = (y_1, \dots, y_n)$ .
2. Rappeler ce que signifie  $r(x, y) = 1$  et  $r(x, y) = -1$ .
3. Montrer que  $r(x, y)$  est invariant par changements d'unités de chacune des séries statistiques  $x$  et  $y$  (On ne fait pas forcément le même changement d'unité sur les deux séries statistiques).
4. Afin d'étudier la relation qui pourrait exister entre l'âge et la pression sanguine, un médecin mesure sur 8 femmes d'âges ( $x$ ) différents la pression sanguine systolique ( $y$ ).

x ( ans)	56	42	72	36	63	47	55	49
y (mm Hg)	147	125	160	118	149	128	150	145

- a) Donner le coefficient de corrélation linéaire entre  $x$  et  $y$ .
- b) Donner l'équation de la droite de régression de  $y$  en fonction de  $x$ .
- c) Quelle estimation de la tension donne cette droite de régression pour une femme âgée de 68 ans ?

**Exercice 2 : (3 pts)**

On observe la variable aléatoire donnant le nombre  $X$  d'accidents par jour sur une période de 50 jours dans une certaine ville. On obtient les résultats suivants.

Nombres d'accidents	Nombre de jours
0	21
1	18
2	7
3	3
4	1

Faire un test statistique au niveau 0.05 pour dire si  $X$  suit une loi de Poisson.

**Exercice 3 : (4 pts)** Les producteurs de vin ajoutent du  $\text{SO}_2$  pour protéger le vin d'une part contre les levures et les bactéries et d'autre part contre l'oxydation. Chez deux producteurs A et B, on a mesuré les concentrations (en mg/l) en  $\text{SO}_2$  de 20 bouteilles pour chacun. Les résultats des mesures (moyenne et écarts-types) sont les suivants :

$$m_A = 21,39, s_A = 0,31$$

$$m_B = 21,25, s_B = 0,206$$

On supposera que la concentration en  $\text{SO}_2$  suit une loi normale.

1. Comparer les dispersions en teneur en  $\text{SO}_2$  des vins des deux producteurs.
2. Est-ce que le producteur A ajoute plus de  $\text{SO}_2$  à son vin que le producteur B ?

**Exercice 4 : (6 pts)**

On considère une variable aléatoire  $X$  de paramètre  $a$  réel positif non nul ayant pour densité :

$$f_a(x) = \frac{a}{x^{a+1}} \mathbb{1}_{[1,+\infty[}(x)$$

1. Pour quelles valeurs de  $a$  l'espérance de  $X$  est-elle définie ? Calculer  $\mathbb{E}(X)$ .
2. En déduire un estimateur naturel de  $a$ .
3. Pour quelles valeurs de  $a$  la variance de  $X$  est-elle définie ? Calculer  $\mathbb{V}(X)$ .
4. Calculer l'estimateur du maximum de vraisemblance du paramètre  $a$ .
5. On dispose de l'échantillon suivant issu de  $X$  :

1,52    2,73    1,81    3,4    1,22    2,42    1,92.

Donner une estimation de  $a$  et en déduire une estimation de la probabilité que  $X$  soit supérieur à 2.