Programmation logique et fonctionnelle, L3 informatique
Examen : première session, année 2018-2019

Modalités
Documents autorisés : trois feuilles A4 recto-verso manuscrites ou imprimées. Ordinateurs et smartphones interdits.

Partie 1 : Logique propositionnelle

A1 (10%)
La formule suivante est-elle cohérente ? Est-elle valide ? Justifiez votre réponse.

$$(a \rightarrow x) \wedge (\neg a \rightarrow y) \wedge (\neg x \vee \neg y) \wedge (\neg x \vee y) \wedge (x \vee \neg y)$$

A2 (10%)
Soient les deux formules suivantes. La formule Σ_2 est-elle conséquence logique de la formule Σ_1 ? La formule Σ_1 est-elle conséquence logique de la formule Σ_2 ? Justifiez vos réponses.

$$\Sigma_1 : (a \rightarrow b) \vee (b \rightarrow a) \qquad \Sigma_2 : a \vee b$$

A3 (10%)
Soient a_0, a_1 deux variables propositionnelles représentant respectivement le bit de poids faible et de poids fort de la représentation en base 2 d'un entier A (par exemple, l'interprétation $a_1 = 1, a_0 = 0$ signifie que A vaut 2). Soient b_0, b_1 deux variables propositionnelles représentant respectivement le bit de poids faible et de poids fort de la représentation en base 2 d'un entier B. Modélisez à l'aide d'une formule propositionnelle la propriété $A \neq B$.

Partie 2 : Logique du premier ordre

B1 (10%)
Soit la formule suivante :

$$\Sigma : \forall X \forall Y \forall Z [(r(X,Y) \wedge r(Y,Z)) \rightarrow \neg r(X,Z)]$$

Avec comme domaine d'interprétation{1,2,3}, donner une interprétation I_1 du prédicat r qui satisfait Σ et une interprétation I_2 du prédicat r qui falsifie Σ.

B2 (10%)
Soit la formule Σ suivante :

$$\Sigma : \exists X \exists Y [p(X,Y) \wedge \neg p(Y,X)]$$

Cette formule est-elle valide ? Est-elle cohérente ? Justifiez votre réponse.

B3 (10%)
Soit l'interprétation suivante :

- Domaine d'interprétation : l'ensemble $\mathbb{N}$ des entiers naturels.
- Interprétation du prédicat somme/3 : somme(A,B,C) est vrai si et seulement si C est la somme de A et B (au sens de l'arithmétique standard).
- Interprétation du prédicat premier/1 : premier(A) est vrai si et seulement si A est un nombre premier.

Donnez une formule de la logique du premier ordre, utilisant pour seuls prédicats somme et premier, qui modélise la propriété : « Tout nombre pair est la somme de deux nombres premiers ».

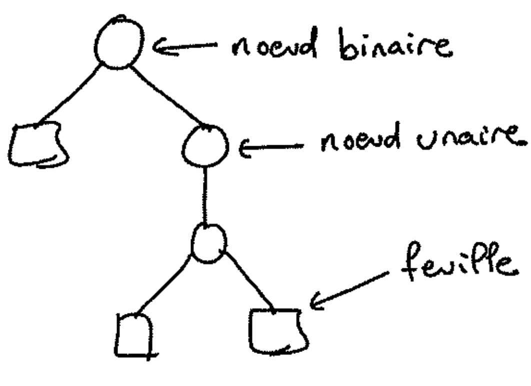
Partie 3 : PROLOG

C1 (10%)
Le principe suivant permet de calculer le PGCD de deux entiers A et B :
Si A est divisible par B (0 is A mod B), alors B est le PGCD de A est B. Dans le cas contraire, en notant R le reste de la division entière de A par B (R is A mod B), on sait que le PGCD de A est B est le PGCD de B et R.
En vous basant sur ce principe, spécifiez un prédicat pgcd/3 tel que si les variables A et B sont instanciées avec des entiers et la variable P n'est pas instanciée, alors le but pgcd(A,B,P) réussi et instancie P avec le PGCD de A et B. Par exemple, pgcd(21,15,P) a pour résultat P=3.

C2 (10%)
On représente les ensembles d'entiers par des listes dans lesquelles chaque élément n'apparait qu'une seule fois. On souhaite spécifier un prédicat permettant de déterminer si un ensemble connu est une partie (un sous-ensemble) d'un ensemble connu.
Par exemple, le but isPart([2,7,3], [3,5,7,2]) doit avoir pour résultat vrai car tous les éléments de la première liste appartiennent à la deuxième. Au contraire, le but isPart([2,4,3], [3,5,7,2]) doit avoir pour résultat faux. Ce prédicat n'est pas sensé permettre de *produire* les parties d'un ensemble.
Vous devez spécifier le prédicat isPart. Vous pouvez utiliser le prédicat prédéfinit member/2 qui permet de vérifier si un élément appartient à une liste. Par exemple, member(7, [1,7,3]) est vrai alors que member(2, [1,7,3]) est faux.

C3 (10%)
Spécifiez un prédicat pref/3 ayant le comportement suivant : si P est une valeur connue, L une liste connue de listes, et R une variable non instanciée, alors le but pref(P, L, R) instancie R avec une liste dont les éléments sont les listes de L en tête desquelles P a été ajouté.
Par exemple, pref(3, [[1,2], [7], [7,8,9]], R) doit avoir pour résultat R = [[3,1,2], [3,7], [3,7,8,9]].

C4 (10%)
On représente des arbres avec les termes fonctionnels suivants : f représente une feuille, u/1 représente un arbre à racine unaire, et b/2 représente un arbre à racine binaire. Les nœuds et les feuilles ne sont pas étiquetés. Par exemple, le terme b(f,u(b(f,f))) représente l'arbre suivant.



Spécifiez un prédicat nbb/2 permettant de déterminer le nombre de nœuds binaires d'un arbre connu. Par exemple, le but nbb(b(f,u(b(f,f))), N) doit avoir pour résultat N = 2 car l'arbre décrit dans le premier slot a deux nœuds binaires.